UNA STRANA UGUAGLIANZA

Può capitare, dividendo tra loro due numeri interi positivi, di non ottenere mai resto zero. In questo caso, da un certo punto in poi, le cifre decimali del risultato si ripetono con regolarità: cioè si ottiene un numero periodico. Il gruppo di cifre che si ripete é chiamato periodo e viene indicato con una linea superiore (o, talvolta, messo tra parentesi); per esempio $113/22=5{,}1363636...=5{,}1\overline{36}$; in questo caso il periodo é 36**. Per trasformare un numero periodico in una frazione si calcola il numero senza la virgola meno la parte che precede il periodo, diviso un numero formato da tanti 9 quante sono le cifre del periodo seguite da tanti zeri quante sono quelle che seguono la virgola e precedono il periodo.** Per esempio, in $5{,}1\overline{36}$ il periodo e la parte decimale che lo precede hanno rispettivamente due ed una cifra, quindi $5{,}1\overline{36}=\frac{5136\text{-}51}{990}=\frac{5085}{990}=\frac{565}{110}=\frac{113}{22}$. Invece $0{,}\overline{3}=\frac{3\text{-}0}{9}=\frac{1}{3}$.

Se proviamo, con questa regola, a calcolare $0{,}\overline{9}$ troviamo $\frac{9\text{-}0}{9}$, cioè 1! Questo risultato é strano, perché ci aspettiamo che 0,999999... sia, per quanto poco, più piccolo di 1. D'altra parte, se moltiplichiamo 0,33333333... per 3[1], otteniamo 0,99999999... . Inoltre é indiscutibile che $0{,}\overline{3}=\frac{1}{3}$ (basta dividere 1 per 3 per rendersene conto). Ma $\frac{1}{3}$ per 3 dà 1: dunque per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, essendo $0{,}\overline{3}$ per 3 uguale a $0{,}\overline{9}$, ma anche ad 1 $\left(0{,}\overline{3}\cdot 3=\frac{1}{3}\cdot 3=1\right)$, deve essere $0{,}\overline{9}=1$!

A questo punto, o pensiamo che la regola che ci hanno insegnato è sbagliata (ma non è così), o accettiamo il fatto che $0{,}\overline{9}=1$, cercando di dare a questo fatto una giustificazione. Ora, noi, più o meno consapevolmente, **immaginiamo un numero reale come qualcosa che abbia infinite cifre decimali[2]. Inoltre riteniamo che due numeri reali siano uguali tra loro se e solo se hanno ordinatamente uguali tutte le loro cifre** (e quindi 0,9999... e 1,0000..., non avendo le stesse cifre non ci sembrano uguali). **Poiché però questa idea**

---

[1] Operazioni come questa vanno eseguite con molta attenzione, perché occorre iniziare ad eseguire le moltiplicazioni da destra, e qui non esiste una cifra più a destra di tutte le altre; tuttavia l'assenza di riporto ci consente, in questo caso, di eseguire l'operazione da sinistra a destra senza commettere errori.

[2] Un numero decimale limitato – cioè con un numero finito di cifre decimali - può essere interpretato come un numero decimale illimitato - con un numero infinito di cifre dopo la virgola -, le cui cifre decimali sono, da un certo punto in poi, 0 (per esempio, 3,45=3,4500000...).

intuitiva entra in contraddizione con il fatto che $0,\overline{9}=1$, dovremo rinunciare ad essa, e quindi riformulare anche la definizione di numero reale.

Dividendo 1 per 3 non otterremo mai resto 0; tuttavia, non potendo materialmente effettuare infiniti passaggi, saremo costretti a fermarci ad un certo punto. Se lo facciamo alla cifra delle unità otteniamo 0, a quella dei decimi 0,3, a quella dei centesimi 0,33, e così via. **Il numero di cifre decimali di un numero periodico non é perciò attualmente, ma solo potenzialmente infinito (cioè non é infinito di fatto, ma può essere grande a piacere). I valori ottenuti, pur non essendo mai uguali ad $\frac{1}{3}$, lo approssimano sempre meglio:** l'errore che commettiamo sostituendo uno di questi valori ad 1/3 può essere piccolo quanto vogliamo, purché prendiamo un numero sufficiente di cifre decimali. Quindi abbiamo una successione di numeri decimali limitati (0; 0,3; 0,33;…) che tende ad $\frac{1}{3}$; quest'ultimo **può essere pensato come il limite di questa successione (cioè ciò a cui tendono i suoi valori, o anche il numero che viene approssimato sempre meglio da 0; 0,3; 0,33;...)**. Limitandoci all'aspetto intuitivo, senza pretesa di dare correttezza formale a questo discorso, possiamo pensare quindi che **un numero reale sia 'qualcosa' a cui ci possiamo avvicinare quanto vogliamo con numeri decimali limitati**. E' importante osservare che, se vogliamo sostituire $\frac{1}{3}$ con un elemento della successione commettendo un errore minore di $\frac{1}{100}$, vanno bene **tutti** gli elementi a partire dal terzo (0,33; 0,333; 0,3333;...). Analogamente perché l'errore sia minore di $\frac{1}{10000}$ possiamo prendere qualunque elemento a partire da 0,3333; **in generale l'errore commesso sostituendo $\frac{1}{3}$ con un elemento della successione può essere piccolo a piacere a patto di considerare solo gli elementi a partire da un certo termine in poi.**

La successione dei numeri 0; 0,3; 0,33; 0,333;… é come una freccia che indica una città (numero reale): diverse frecce possono indicare la stessa città, così come esistono diverse successioni che tendono ad uno stesso numero. Per esempio $\frac{1}{3}$ può essere approssimato per eccesso dai numeri 1; 0,4; 0,34; 0,334;..., o una volta per difetto e una volta per eccesso (0; 0,4; 0,33; 0,334; 0,3333; 0,33334;...), e così via: $0,\overline{3}$ indica solo una di queste successioni (l'insieme dei valori approssimati per difetto).

Analogamente $0,\overline{9}$ indica la successione **0; 0,9; 0,99; 0,999;...** . E' abbastanza intuitivo che questi numeri **approssimano sempre meglio 1**, e quindi é del tutto logico che sia $0,\overline{9}=1$; tuttavia anche la successione **1; 1,0; 1,00; 1,000;...**, i cui valori **sono tutti uguali ad 1, indica**

appunto questo valore, che in questo caso viene approssimato addirittura senza errore! Esistono due numeri periodici (frecce), ed esattamente $0,\overline{9}$ e $1,\overline{0}$ (ovviamente, lo zero periodico non viene mai indicato, per cui si scrive 1 al posto di $1,\overline{0}$)**, che approssimano lo stesso numero (indicano la stessa città).**

In definitiva, $5,1\overline{36}$ **non indica un numero con infinite cifre decimali, ma solo una successione di numeri che ne hanno rispettivamente 0, 1, 2,... . Questa successione, pur identificando un ben preciso numero reale, non è esattamente il numero reale (d'altra parte anche una carta di identità, pur permettendo di identificare una persona, non è la persona). Poiché varie successioni approssimano lo stesso numero reale, quest'ultimo può essere pensato come il loro insieme: un po' come se avessimo un pacchetto di caramelle dello stesso tipo. Se estraiamo una caramella dal pacchetto (numero periodico), capiamo cosa contiene il pacchetto (numero reale); tuttavia la caramella non esaurisce l'intero pacchetto, così come un numero periodico è solo una delle successioni che, tutte insieme, formano un numero reale.**