MARCO MOTTA

LE GEOMETRIE NON EUCLIDEE

<<C'era una volta un re - seduto sul sofà - chiamava la sua serva: - <<Raccontami una storia!>>. - La serva gliela raccontava: -

Una storia... non euclidea. Come le ‘rette’ della geometria ellittica, questa favola non ha né inizio né fine, pur avendo lunghezza finita (vedere il paragrafo “la geometria della sfera” a pag. 10).

PRIMA PARTE

CONSIDERAZIONI GENERALI

EUCLIDE E L'OPERA

Nel sesto secolo prima di Cristo venne introdotta in Grecia la geometria, il cui sviluppo era stato dovuto fino ad allora a babilonesi e egizi. E' tuttavia **presso i Greci che questa disciplina si avvicina significativamente alla nostra attuale concezione, attraverso l'astrazione e l'introduzione del punto senza dimensioni. Questi due elementi determinano la nascita di quella che viene chiamata geometria razionale.**

L'astrazione consiste nel considerare le figure geometriche indipendenti dalla realtà, per quanto da essa derivate**: si incomincia a parlare per la prima volta di rettangoli e quadrati, anziché di vasche rettangolari e campi quadrati. L'introduzione del punto senza dimensioni, e quindi delle linee senza larghezza e delle superfici senza spessore, si oppone alla precedente concezione granulare del punto, in base alla quale esso veniva considerato come un granellino di sabbia, una sorta di atomo indivisibile di dimensioni costanti, per quanto determinabili a piacere, ma non nulle.** Questa concezione, indubbiamente più semplice della nostra, fu messa in crisi dalla scoperta dell'incommensurabilità del lato e della diagonale del quadrato, cioè dell'impossibilità che entrambi i segmenti contengano un numero intero di punti, per quanto piccoli (a meno che questi abbiano appunto dimensioni nulle: ma, in questo caso, ogni segmento contiene infiniti punti).

In questo contesto possiamo collocare Euclide, vissuto nel terzo secolo avanti Cristo, che con i suoi Elementi, pur non inventando dal nulla la geometria razionale, sviluppa ed organizza i contributi preesistenti, offrendoci una sintesi organica tanto notevole che bisogna aspettare l'opera di Hilbert, alla fine del diciannovesimo secolo, per fare dei passi in avanti significativi. Certo, la critica moderna ha individuato varie proprietà utilizzate da Euclide facendo ricorso all'intuizione, veri e propri postulati non enunciati esplicitamente; tuttavia, tenendo conto dell'epoca in cui furono scritti, gli Elementi di Euclide non vedono per questo minimamente sminuita la loro importanza.

Euclide inizia il primo dei suoi tredici libri enunciando 23 **termini,** 9 **nozioni comuni e** 5 **postulati, a cui seguono le dimostrazioni** delle prime proposizioni, cioè **dei primi teoremi.** Le nozioni comuni sono postulati validi per tutte le scienze, mentre **i termini corrispondono, grosso modo, a quelle che**

oggi chiamiamo definizioni. C'è tuttavia **una differenza importante tra una definizione moderna e i termini di Euclide. La prima é solo un modo più breve di indicare un concetto complesso in funzione di altri già noti**: per esempio, chiamando circonferenza il luogo dei punti del piano per cui é costante la distanza da un punto fisso, utilizziamo le nozioni di insieme, punto, piano, distanza e uguaglianza, che devono quindi essere presentate precedentemente. **Non é possibile definire tutti i concetti utilizzati, perché questo processo necessita di un punto di partenza, per evitare i rimandi all'infinito** (un concetto definito a partire da un altro, a sua volta definito in funzione di un terzo... e così via, senza fine), **ma anche le definizioni circolari** (un concetto definito in funzione di un altro, espresso a sua volta in funzione del primo[i]). **Da qui la necessità che alcuni concetti vengano presentati come primitivi, cioè non definiti.**

Per Euclide, invece, i termini danno una descrizione fisica di punti, rette, piani..., certo non interpretati come oggetti materiali, ma proprio per questo, per lui, ancora più reali, come se fossero veramente esistenti. E' evidente in questa concezione l'influenza del filosofo Platone, che sosteneva che le Idee costituiscono la vera realtà, mentre il mondo sensibile é una sua pallida imitazione. **In definitiva, mentre per noi le definizioni indicano concetti, elaborazioni del pensiero umano, per Euclide i termini descrivono oggetti in qualche maniera realmente esistenti.**

I POSTULATI DI EUCLIDE

Riportiamo di seguito i cinque postulati di Euclide, cioè quelli che si riferiscono in modo specifico alla geometria:

Risulti postulato:

1) che si possa condurre una retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto;

---

[i] Se, per esempio, dicessimo che una persona é buona quando non é cattiva, mentre é cattiva quando non é buona, rimarrebbero senza risposta le domande: che cosa significa essere buono o cattivo? L'impressione che forse qualcuno potrebbe avere di aver capito il contenuto di queste definizioni deriverebbe in realtà non da esse, ma solo dalla nostra esperienza passata, per cui in pratica conoscevamo già il significato delle parole buono e cattivo.

2) e che una retta terminata si possa sempre prolungare continuamente in linea retta;

3) e che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro ed ogni distanza* (=raggio)*;

4) e che tutti gli angoli retti siano uguali tra loro;

5) e che se una retta, venendo a cadere su due rette, forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti.

Il **primo postulato** afferma che per due punti distinti passa sempre una retta. Si noti che Euclide non enuncia mai esplicitamente la sua unicità, anche se qualche commentatore la fa derivare dalla nona nozione comune (*due linee rette non racchiudono uno spazio*). Noi, oggi, diremmo**: per due punti distinti passa una e una sola retta.**

Il **secondo postulato** mostra che ciò che Euclide chiama retta é in realtà solo un segmento prolungabile a piacere da entrambe le parti**:** in definitiva, una linea solo potenzialmente, e non attualmente, infinita, a differenza della nostra attuale concezione. In parole povere, questo assioma afferma che **le rette hanno lunghezza infinita.**

Il **terzo postulato** é equivalente a quello che oggi chiamiamo del trasporto del segmento**: si può costruire su qualunque retta, ed in ogni verso, un segmento di lunghezza arbitraria partire da qualunque suo punto.** Infatti, costruendo una circonferenza col compasso, non facciamo altro che trasportare, a partire da un punto fisso, uno stesso segmento su rette diverse, in uno dei due possibili versi. Si osservi come Euclide sia legato, pur senza mai nominarli, agli strumenti da disegno. Egli non spiega mai come disegnare una retta o una circonferenza, non scende al livello della realtà sensibile: ci mostra invece le proprietà astratte che ci permettono di utilizzare riga e compasso. Inizia affermando l'esistenza della retta per due punti, che ci permette di usare la riga puntandola su di essi, continua dicendo che una retta può essere prolungata all'infinito da entrambe le parti, esattamente come faremmo con una riga sufficientemente lunga, infine afferma la possibilità di costruire cerchi con qualunque centro e qualunque raggio (uso del compasso). Notiamo ancora una volta che gli enti geometrici assomigliano molto alle idee platoniche: oggetti pensati come realmente esistenti nel mondo delle Idee, e di cui quelli reali sono imitazioni.

Il quarto postulato per noi non sarebbe necessario, poiché l’uguaglianza di tutti gli angoli retti segue dal fatto che sono la metà di una angolo piatto. Dato che Euclide chiama angolo l’inclinazione tra due rette, e non, come noi, la parte di piano delimitata da due semirette aventi l’origine in comune, egli non considera l’angolo piatto (due rette coincidenti... non hanno inclinazione!), e quindi non può fare a meno di questo postulato.

Il quinto postulato afferma che due rette tagliate da una trasversale, se formano da una parte angoli coniugati interni la cui somma é minore di un angolo piatto, si incontrano da quella stessa parte (FIGURA 1**). Una proprietà del tutto equivalente é la seguente: per un punto esterno ad una retta passa una ed una sola retta parallela ad essa.**

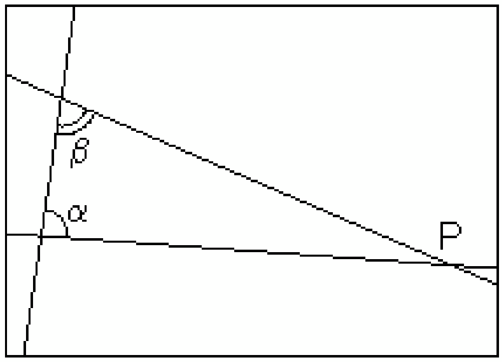

FIGURA 1 - Due rette, che formano angoli coniugati interni α e β la cui somma sia minore di 180°, si incontrano in un punto P che si trova dalla parte di α e β.

IL QUINTO POSTULATO

Per i Greci i postulati erano proprietà vere perché evidenti; le dimostrazioni dei teoremi rendevano poi, in un certo senso, altrettanto evidente la verità di proprietà (si pensi, per esempio, al teorema di Pitagora) **di per se stesse non intuitive.** Salta subito agli occhi che **il quinto postulato é molto più complesso, e quindi molto meno intuitivo, degli altri quattro; per questo il fatto che non sia stato dimostrato é stato giudicato dai commentatori successivi un difetto degli Elementi. Inoltre la validità dei primi quattro postulati può essere verificata anche all’interno di un foglio, anche se limitatamente ad esso, nonostante le sue dimensioni finite:** per esempio, dati comunque due punti distinti interni al foglio, si può mostrare con una riga che esiste una ed una sola retta che li contiene. **Non é invece sempre possibile verificare sempre se due rette tagliate da una trasversale, che formano da una parte angoli coniugati interni la cui somma é minore di un angolo piatto, si incontrino da quella stessa parte, perché il loro punto di intersezione potrebbe essere esterno al foglio.**

Lo stesso Euclide non utilizzò il quinto postulato nelle dimostrazioni dei primi ventotto teoremi, come se avesse tentato di farne a meno. In particolare la proposizione 17 del primo libro degli Elementi dimostra che la somma di due angoli interni di un triangolo é sempre minore di due retti; questo risultato però non viene mai usato, ed é una conseguenza banale della proposizione 32 (dimostrata però anche grazie al quinto postulato), che afferma che la somma degli angoli interni di un triangolo é di due retti. Sembra proprio che lo stesso Euclide non considerasse il quinto postulato alla stregua degli altri quattro; probabilmente avrà tentato di dimostrarlo, ma, non essendoci riuscito, non gli é rimasto altro da fare che ammetterlo come assioma.

Nel corso dei secoli vi furono numerosi tentativi di dimostrazione del quinto postulato, ma nessuno riuscì nel suo intento. Alcuni tentarono di sostituire al quinto postulato qualche proprietà più intuitiva: la più importante é quella che afferma che per un punto esterno ad una retta esiste una ed una sola retta parallela ad essa (da cui il nome postulato delle parallele). Questo però non risolse il problema, perché la nuova proprietà é comunque un postulato. Altri tentarono di riformulare la definizione di parallelismo in modo da non rendere più necessario il quinto postulato; tuttavia ciò implicava, in un modo o nell'altro, la necessità di un ulteriore assioma. **Assume particolare importanza l'opera di** Girolamo **Saccheri** (1667-1733)**, che tentò la strada della dimostrazione per assurdo. Egli cercò di dedurre, dai primi quattro postulati uniti alla negazione del quinto, una contraddizione. Se fosse riuscito nell'intento, avrebbe dimostrato la dipendenza del postulato delle parallele dagli altri, cioè l'impossibilità di concepire una geometria in cui valessero appunto i primi quattro postulati e la negazione del quinto.**

Anche se tutti questi tentativi si rivelarono infruttuosi, servirono a far nascere, un po' per volta, l'idea che il postulato delle parallele non si potesse dimostrare, e quindi, sia pure tra mille perplessità, che fosse possibile concepire geometrie in cui valesse la negazione del quinto postulato: per l'appunto, geometrie non euclidee. Si ricordano, a questo proposito, i contributi dati da Karl Friedrich **Gauss** (1777-1855) **e** Nikolay Ivanovic **Lobacevsky** (1793-1856)**, che ne studiarono le proprietà. Ma il problema fu chiarito definitivamente quando** Bernhard **Riemann** (1826-1866)**,** Felix **Klein** (1849-1925) **e altri mostrarono dei modelli di geometrie non euclidee, cioè utilizzando gli enti della geometria euclidea riformularono concetti come punto, retta e piano in modo da far valere i primi quattro**

postulati insieme alla negazione del quinto. Nei prossimi paragrafi verranno descritti nei particolari questi modelli.

LA GEOMETRIA DELLA SFERA

Immaginiamo un essere bidimensionale che viva sulla superficie di un pianeta perfettamente sferico, senza avvallamenti né montagne, **che abbia** però **una forma tale da aderire perfettamente al suolo. Costui, che per comodità chiameremo nel seguito El Littico** (o, più rapidamente, El), **non si** può **rende**re **conto dell'esistenza della terza dimensione** in cui pure lo vediamo immerso (la superficie di una sfera delimita pur sempre un solido)**, per cui** probabilmente **chiamerà 'piano' la superficie della sfera e,** almeno **inizialmente, 'punti' i suoi punti. Se El vorrà**, come noi, **chiamare 'segmento' la linea più breve che congiunge due 'punti',** poiché i nostri segmenti sono esterni al suo mondo, e quindi per lui sconosciuti, **non gli rimarrà altro da fare che tendere un filo in modo che aderisca alla superficie della sfera.** D'altra parte anche noi, se volessimo andare da Roma a New York, non penseremmo mai... di scavare una galleria che colleghi le due città in linea retta; probabilmente prenderemmo un aereo che, grosso modo, segua la curvatura della superficie terrestre! **Se tendiamo un filo su una sfera,** ci accorgiamo che **esso assume la forma di un arco di cerchio massimo** (cioè il cui raggio é uguale a quello della sfera). **Questo é il 'segmento' di El** (FIGURA 2)**. Se** poi **il nostro essere bidimensionale penserà una 'retta' come 'segmento' prolungato all'infinito da entrambe le parti, otterrà un arco di cerchio massimo completo.** Per esempio, sulla superficie

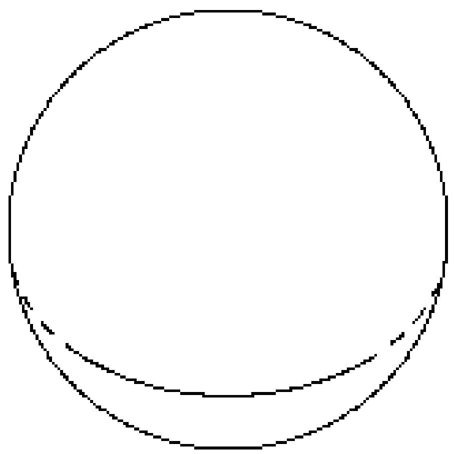

FIGURA 2 - Tendendo un filo sulla superficie di una sfera si può verificare che la linea più breve che congiunge due punti é un arco di cerchio massimo.

terrestre, sono ‘rette’ tutti i meridiani e l’equatore, ma non gli altri paralleli (FIGURA 3).

Notiamo un fatto curioso**: a differenza di quanto accade a noi, abituati alla geometria euclidea, El, muovendosi lungo una ‘retta’, tornerà prima o poi al punto di partenza. In altre parole, le ‘rette’, pur essendo illimitate** (ci si può muovere all’infinito lungo una circonferenza, senza mai trovarne la fine), **hanno lunghezza finita.**

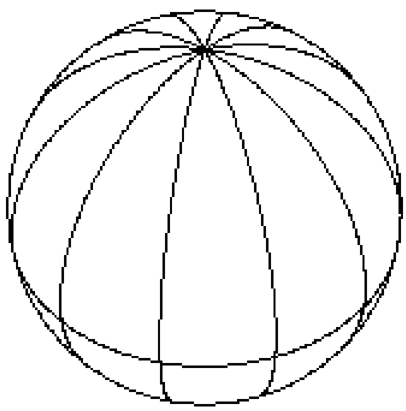

FIGURA 3 - Sulla Terra sono ‘rette’ l’equatore e tutti i meridiani.

Per quanto riguarda la validità dei primi quattro postulati di Euclide, osserviamo che **per due ‘punti’ distinti passa sempre almeno una ‘retta’; tuttavia da due ‘punti’ diametralmente opposti possiamo condurre infinite ‘rette’ distinte** (per esempio, tutti i meridiani passano per i poli Nord e Sud della Terra). Ora, **é possibile che El desideri che per due punti distinti passi una e una sola retta** (che abbia sentito parlare della geometria euclidea?)**; in questo caso egli dovrà correggere la definizione data di ‘punto’, attribuendo questo nome ad una coppia di punti diametralmente opposti.** Così il fatto che per due punti diametralmente opposti passino infiniti cerchi massimi viene interpretato in un modo per noi del tutto normale: per un ‘punto’ passano infinite ‘rette’ distinte.

In generale, **possiamo verificare la validità dei primi quattro postulati di Euclide (ad eccezione**, come abbiamo visto, **del secondo), ma non del quinto: <u>per un ‘punto’ esterno ad una ‘retta’ non passa nessuna ‘retta’ parallela alla ’retta’ data</u>: infatti, due archi di cerchio massimo hanno sempre un ‘punto’ in comune, e quindi non esistono ‘rette’ parallele in senso stretto** (cioè prive di punti in comune)**.**

Gli studenti del mondo di El studieranno perciò una geometria diversa da quella a cui siamo abituati: **una geometria che, contenendo una negazione del quinto postulato di Euclide, viene chiamata non Euclidea;** in cui, non esistendo rette parallele in senso stretto (cioè prive di punti in comune), saranno diverse anche molte altre proprietà che a partire dall’esistenza della parallele vengono dimostrate: per esempio, come vedremo tra breve, la somma degli angoli interni di un triangolo é sempre maggiore di un angolo piatto.

Ah, dimenticavo: **la geometria che descrive il mondo di El Littico viene chiamata**, guarda caso, **ellittica**!

I TRIANGOLI SFERICI

El si accorgerà facilmente di un altro fatto curioso per noi, abituati alla geometria euclidea, e quindi anche alla validità del quinto postulato e delle sue conseguenze**: la somma degli 'angoli' interni ad un 'triangolo' é sempre maggiore della somma di due 'angoli retti'!** Per poter verificare questa asserzione dobbiamo prima capire cosa possano significare per il nostro essere le parole 'angolo', 'triangolo', 'angolo retto'.

Per noi un angolo é ognuna delle parti in cui viene diviso il piano da due rette che hanno l'origine in comune, quindi **El chiamerà 'angolo' ognuna delle parti in cui la superficie della sfera viene divisa da due cerchi massimi** (che hanno sempre un 'punto', cioè due punti diametralmente opposti, in comune). In particolare gli angoli retti sono formati da rette perpendicolari.[ii] Ricordando che chiamiamo in questo modo due rette che dividono il piano in quattro parti uguali, capiamo che, per analogia, **sulla sfera per El sono 'rette perpendicolari' due archi di cerchio massimo che la dividono in quattro spicchi uguali, 'angoli retti' quelli formati da esse: per esempio, sulla superficie terrestre, tutti i meridiani sono perpendicolari all'equatore. Prendendo in considerazione due meridiani 'perpendicolari' e l'equatore, si**

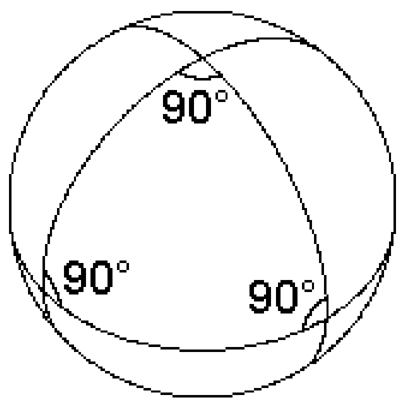

FIGURA 4- - Nella geometria ellittica é possibile costruire un 'triangolo' con tre 'angoli' di 90°.

[ii] Definizioni come 'un angolo retto é un angolo di 90°' non sarebbero utilizzabili: infatti, che cosa é un angolo di 90°? E a cosa può corrispondere sulla superficie di una sfera? E' invece perfettamente chiaro cosa significa dividere la superficie di una sfera in quattro spicchi uguali.

ottengono tre rette a due a due perpendicolari.[iii] **I ‘segmenti’ appartenenti alle tre ‘rette’ e delimitate dai loro punti di intersezione formano, per El, un ‘triangolo’ che ha tutti e tre gli ‘angoli’ interni ‘retti’: un ‘triangolo trirettangolo’** (FIGURA 4)**!**

IL MODELLO DI KLEIN

Ora **immaginiamo un essere bidimensionale**, perfettamente piatto, che non abbia alcuna coscienza dell'esistenza

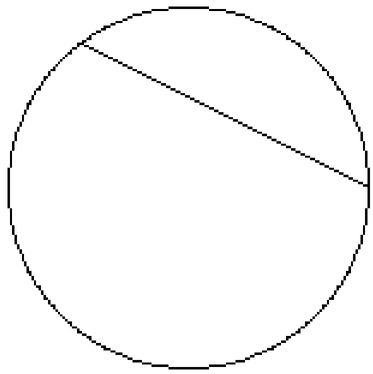

FIGURA 5 - Per Iper si chiama ‘retta’ una corda privata dei suoi estremi.

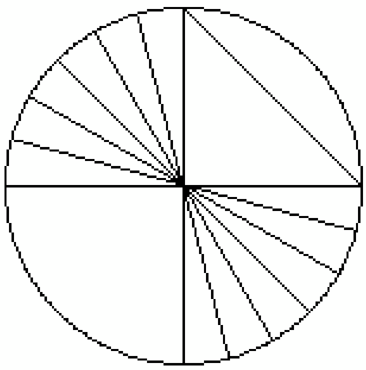

FIGURA 6 - Per un ‘punto’ esterno ad una ‘retta’ passano infinite ‘rette’ parallele ad una data.

della terza dimensione. Supponiamo inoltre **che** costui, che chiameremo per comodità Iper Bolico (o, più confidenzialmente, Iper), **si possa muovere solo all'interno di un cerchio** $\mathcal{C}$ (in altre parole che non possa uscire da $\mathcal{C}$, né toccare la circonferenza C che lo delimita). **Il nostro essere**, poiché per lui non esistono i punti appartenenti o esterni a C, **chiamerà** probabilmente **'punti' tutti i punti interni al cerchio, 'piano' l'insieme di tali punti** (FIGURA 5)**.** Poiché un segmento é la linea più breve che congiunge due punti e una retta é un segmento prolungato all'infinito da entrambe le parti, ci possiamo aspettare che Iper chiami **'segmento' qualunque segmento che congiunge due punti interni a** $\mathcal{C}$ **e 'retta' una corda della circonferenza**

[iii] Osserviamo che la ‘perpendicolare’ condotta ad una ‘retta’ per un ‘punto’ non é sempre unica: per i poli possiamo condurre infinite ‘rette’ perpendicolari all’equatore.

privata dei suoi estremi. Iper **potrà verificare facilmente la non validità del quinto postulato di Euclide: per un 'punto' esterno ad una 'retta' passano infinite 'rette' parallele ad una data**[iv] (FIGURA 6)**, cioè per un punto interno al cerchio, ma esterno ad una corda MN, passano infinite corde prive di punti in comune con MN (o, al limite, che hanno in comune con essa solo M o N**, che, come abbiamo detto, non fanno parte della 'retta' di Iper**).**

Si verifica che **valgono i primi quattro postulati**. Attenzione: **apparentemente é falso quello che afferma l'illimitatezza delle rette, perché le corde hanno lunghezza finita. Supponiamo, tuttavia, che**, per uno strano sortilegio, **le dimensioni di Iper varino mentre si sposta all'interno di** $\mathcal{C}$**: per semplificare il ragionamento potremmo immaginare che, mentre Iper si sposta dal centro O di C al punto medio A del raggio OM, egli si dimezzi.** Attenzione! Iper non può accorgersi in nessun modo di essersi rimpicciolito: noi, dall'esterno, essendo immuni al sortilegio, ce ne rendiamo conto, ma **lui, poiché anche il metro che aveva con sé si é dimezzato, troverà in A, come misura delle proprie dimensioni** [INSERIRE FIGURA] (ovviamente, lunghezza e larghezza, essendo nulla l'altezza di Iper!)**, gli stessi valori che aveva rilevato in O**; per esempio, se Iper ed il suo metro in O fossero lunghi un metro per entrambi, noi li vedremmo in A ridursi a mezzo metro; Iper concluderebbe quindi di essere lungo in A, proprio come in O, un metro: esattamente come il proprio strumento di misura.

Tuttavia, avendo dimezzato sia le proprie dimensioni, sia la distanza dal punto M, per Iper M é lontano... esattamente come prima! **Se il nostro essere, ogni volta che si dimezza ulteriormente la sua distanza da M, continuerà a dimezzarsi,** egli non riuscirà mai a raggiungere l'estremo M del diametro MN; più in generale, **qualunque 'retta' MN avrà per lui una lunghezza infinita. Rimane quindi verificato l'assioma che afferma l'illimitatezza delle rette.**

Nel mondo di Iper vale quindi **un tipo di geometria in cui sono veri i primi quattro postulati di Euclide, ma non il quinto;** come forse vi sarete aspettati, **chiameremo iperbolica una geometria in cui per un punto esterno ad una retta si possono condurre infinite rette parallele ad una data.**

[iv] Più esattamente si chiamano 'rette parallele' due corde aventi in comune un estremo sulla circonferenza; le altre 'rette' prive di 'punti' in comune vengono chiamate semplicemente non secanti.

CONSEGUENZE FILOSOFICHE

Anche in questo caso **abbiamo costruito, all'interno della geometria euclidea** (abbiamo usato cerchi, punti, corde...), **un modello di geometria non euclidea, cioè abbiamo reinterpretato i termini punto, retta, piano,... in modo che siano ancora verificati tutti i postulati di Euclide, ad eccezione del quinto.** <u>**Se fosse possibile dimostrare il postulato delle parallele a partire dagli altri**</u> (cioè se fosse impossibile che valessero contemporaneamente i primi quattro postulati e la negazione del quinto), <u>**avremmo trovato una contraddizione interna alla stessa geometria euclidea.**</u> **In altre parole, se la geometria euclidea é coerente** (cioè se non si può dedurre dai suoi postulati nessuna contraddizione), **devono essere altrettanto coerenti quelle non euclidee: in questo modo** <u>**geometrie assolutamente inconciliabili tra loro sono legate a doppio filo: nessuna di esse può cadere in contraddizione senza negare, implicitamente, la validità dell'altra.**</u> Per questo motivo termini come ‘punto’, ‘retta’ e ‘piano’, che sono stati utilizzati fin qui tra virgolette quando indicavano enti non euclidei (quasi che le definizioni date fossero finzioni, mentre il loro unico autentico significato fosse quello euclideo), hanno la stessa dignità in tutte le geometrie possibili: non esistono interpretazioni di serie A e di serie B.

La scoperta del**l'esistenza di varie geometrie alternative ha portato a riformulare completamente il concetto di verità in matematica: non abbiamo più una sola verità** (geometria euclidea)**, ma più ‘verità’ possibili, talora inconciliabili tra loro. Di conseguenza anche i postulati possono essere scelti in diversi modi, e quindi non sono più considerati veri perché evidenti**, o perché rappresentano in qualche modo (più o meno schematico) il mondo reale; **possono invece essere del tutto arbitrari, purché non in contraddizione tra loro.** Una teoria matematica non é più necessariamente legata alla realtà fisica, ma diventa in modo pienamente consapevole un sistema autonomo, uno degli infiniti mondi coerenti teoricamente possibili, anche se non necessariamente ‘esistenti’. Non che Euclide pensasse che esistessero fisicamente i suoi punti senza dimensioni o le sue linee senza spessore; semplicemente questi concetti erano l’idealizzazione di oggetti reali. Oggi questo collegamento non é più ritenuto necessario. (**Problema: se i postulati sono totalmente arbitrari, cosa rende una teoria matematica più interessante di un'altra? Cosa ha la matematica in più rispetto ad un gioco**, dalle parole crociate alla dama o persino al calcetto**?** In definitiva, **perché é giusto che uno studente sia costretto a studiare matematica? Avendo eliminato il concetto dell'utilità, della necessaria relazione con la realtà, come presupposto per la**

validità dei postulati e quindi di una teoria, saremo probabilmente costretti a riprenderlo in considerazione quando ci domanderemo perché studiare matematica, quando potremmo divertirci di più giocando a pallone! Benché in astratto la scelta dei postulati sia arbitraria, in pratica vengono scelti spesso in funzione delle applicazioni pratiche delle teorie; a volte, tuttavia, non é chiara a priori l'utilità di una branca della matematica: é capitato di utilizzare, inaspettatamente, teorie nate per esigenze di carattere esclusivamente teorico-speculativo.)

C'é stata un'altra conseguenza importante della scoperta delle geometrie non euclidee: **se i postulati non sono più veri perché evidenti, viene loro a mancare quella sorta di verifica sperimentale che in qualche modo giustificava l'intera teoria, assicurandone indirettamente la coerenza** (cioè l'impossibilità di dimostrare contemporaneamente la verità e la falsità della stessa affermazione). **Ci si comincia perciò a domandare: chi ci garantisce che la geometria euclidea sia coerente**, che non si riesca un domani a dimostrare una sua contraddizione**? Questo porta a varie conseguenze** che non possono essere riportate in questo scritto per brevità**; tra di esse si ricorda lo sviluppo della logica matematica, una sorta di teoria sulle teorie che investiga e formalizza i meccanismi dimostrativi.**

LA GEOMETRIA FISICA

A questo punto **ci possiamo porre un altro problema: se, in astratto, é possibile concepire geometrie diverse, ne esiste una adatta a descrivere fisicamente l'universo? E quale? Per verificarlo possiamo calcolare la somma degli angoli interni di un triangolo: infatti si dimostra che, a seconda che il risultato sia minore, uguale, o maggiore di un angolo piatto, devono valere rispettivamente la geometria iperbolica (esistono infinite parallele), euclidea (la parallela é unica), o ellittica (non esistono parallele). Tutto a posto quindi se il risultato della nostra misura é diverso da 180°; ma se fosse proprio 180°? Non potremmo essere sicuri che l'universo sia euclideo, perché a causa dell'errore sperimentale il risultato esatto potrebbe essere anche poco meno o poco più di un angolo piatto**. D'altra parte é quello che succede normalmente sulla superficie della Terra: se trascuriamo l'esistenza di montagne e avvallamenti, nonché l'appiattimento ai poli, **il nostro pianeta é sferico; qualunque triangolo disegnato sulla sua superficie non é quindi diverso da quelli del mondo di El Littico; in particolare la somma degli angoli interni deve superare un angolo piatto. Se**

però il triangolo occupa una piccola porzione della superficie terrestre, questa non differisce molto da una superficie piana, ed é quindi del tutto ragionevole aspettarsi che la somma degli angoli interni del triangoli sia solo di pochissimo superiore a 180°. In fondo gli antichi potevano pensare che la Terra fosse piatta perché, prendendone in considerazione solo una piccola porzione, commettevano un errore trascurabile.

Ora, **gli esperimenti fatti danno, per la somma degli angoli interni di un triangolo, sempre 180°. Chi ci assicura, tuttavia, di non ottenere risultati diversi prendendo in considerazione triangoli sempre più grandi?** Non saremo anche noi come coloro che, avendo avuto modo di osservare solo una piccola parte della superficie terrestre, ne avevano dedotto che fosse piatta? **Non avremo preso in esame porzioni troppo piccole dell'universo?**

Per venire a capo del problema dobbiamo domandarci quale significato fisico possano avere concetti primitivi come quello di retta. Ricordiamo che una retta é la linea più breve che congiunge qualunque sua coppia di punti, e che nessun oggetto può muoversi ad una velocità superiore a quella della luce. Poiché non ha senso fisico una definizione geometrica che non sia suscettibile di misura, una retta non può essere definita in altro modo se non come il percorso seguito da un raggio di luce. Ma i campi gravitazionali deviano tutto ciò che si trova al loro interno, compresa la luce: dunque in presenza di oggetti, soprattutto se massicci come le stelle, una linea retta non può essere 'dritta': quindi la geometria più adatta a descrivere lo spazio non é quella euclidea. Possiamo pensare che, **in assenza di materia, l'universo sarebbe euclideo; tuttavia la differenza rispetto ad un universo euclideo deve essere tanto maggiore quanto maggiori sono le masse in gioco.** Infatti un raggio di luce viene deviato poco da una singola stella, e solo se si trova nelle sue vicinanze; tuttavia nell'universo esistono svariati miliardi di miliardi di stelle: se la massa dell'universo fosse sufficiente, **non potremmo** quindi **escludere che un raggio di luce, dopo essere stato deviato molte volte, possa persino tornare al punto di partenza, un po' come le rette della geometria ellittica.** Fino a pochi anni fa ci si domandava se la quantità di materia presente nell'universo fosse sufficiente a giustificare l'uso di una geometrica non euclidea per lo studio dell'universo; misure abbastanza recenti sembrano indicare tuttavia che 'universo sia euclideo almeno su larga scale; tuttavia perlomeno nelle vicinanze di corpi di grande massa, la geometria più adatta per descrivere l'universo é quella ellittica.

KANT E LE FORME A PRIORI

La scoperta delle geometrie non euclidee mise in crisi la concezione di Emanuele **Kant** (1724-1804). Il **filosofo suppose che spazio e tempo non esistessero in quanto tali, ma che fossero** solo **la forma in cui necessariamente ci si comunicano le cose. Questo lo portò ad una distinzione: da una parte esistono le cose in sé, che però non sono** per definizione **conoscibili** in quanto, finché non assumono le forme dello spazio e del tempo, non interagiscono con l'osservatore (e quindi, per noi, è come se non esistessero); **dall'altra ci sono i fenomeni, cioè il modo in cui le cose si manifestano attraverso queste forme**, l'unico in cui possiamo effettivamente conoscerle**.** Le cose in sé sono indipendenti dall'osservatore, e quindi il loro modo di essere non può esserne influenzato, mentre i fenomeni dipendono anche dal nostro modo di apprendere. Ebbene, non possiamo percepire nulla se non attraverso le forme dello spazio e del tempo. La loro descrizione, e quindi lo studio della geometria, diventa essenziale per una teoria della conoscenza.

Kant afferma che le verità matematiche, comprese quindi quelle relative alla geometria, sono giudizi sintetici a priori. A differenza di certi principi logici, come il principio di identità, che afferma che ogni cosa é uguale a se stessa, **i teoremi danno una informazione reale sul mondo, e non solo su se stessi (per questo sono detti sintetici), ma non derivano dall'esperienza, essendo connaturati con la natura stessa dell'uomo (e dunque a priori).** Tutta questa costruzione è motivata dall'esigenza, che Kant aveva, di giustificare la verità della scienza Newtoniana, in cui credeva fermamente, e quindi dell'uso che tale scienza fa della matematica. Se la verità della matematica fosse stata connessa all'esperienza (giudizi a posteriori), la sua verità avrebbe dovuto essere dimostrata in modo induttivo (cioè, avendo visto che una proprietà si é sempre rivelata valida, avremmo dovuto concludere che altrettanto accadrà in futuro); tuttavia nulla ci assicura che ciò che si é finora verificato, magari miliardi di volte, debba ripetersi sempre; per fare un esempio banale, il fatto di poter verificare che i primi due milioni di numeri interi positivi siano tutti minori di 2.000.001 non ci assicura che ciò sia vero anche per i successivi, che infatti non lo sono più. L'unico modo per dimostrare veramente una proprietà é quindi il metodo deduttivo proprio della matematica, cioè far discendere da alcune premesse le loro conseguenze, senza utilizzare in alcun modo l'esperienza.

I teoremi della geometria devono dunque essere necessariamente veri, riguardando le proprietà dello spazio, cioè **di una delle forme in cui necessariamente i fenomeni ci si manifestano. Per Kant la geometria euclidea é quindi l'unica possibile**, essendo connaturata con il modo di essere dell'osservatore, indipendentemente dall'esperienza**.** Per usare le sue parole, <<*La geometria é una scienza che determina le proprietà dello spazio* *sinteticamente e nondimeno a priori... Le proposizioni geometriche sono tutte congiunte con la coscienza della loro necessità... ma tali proposizioni non possono essere giudizi empirici o sperimentali, né derivarne*>> (dalla Critica della ragion pura).

L'ipotesi che la geometria più adatta a descrivere l'universo potesse non essere quella euclidea, ma soprattutto la scoperta di geometrie alternative e la conseguente separazione tra geometria matematica e geometria fisica mise in crisi la concezione kantiana delle forme a priori. In altre parole**, la scoperta che sono possibili diverse geometrie alternative ugualmente coerenti, mentre ovviamente non tutte possono essere adatte a descrivere il mondo reale**[v]**, mostrò che le verità matematiche non necessariamente rispecchiano la realtà: solo una verifica sperimentale può farci capire se un teorema di geometria fornisce anche una qualche informazione sul mondo.**

---

[v] Più precisamente é possibile concepire una geometria in cui le proprietà dello spazio variano da punto a punto: euclidea, ellittica o iperbolica a seconda della zona presa in considerazione; tuttavia non é possibile che in una stessa porzione di spazio valgano contemporaneamente, per esempio, le proprietà della geometria ellittica e di quella iperbolica, visto il loro carattere assolutamente inconciliabile.

SECONDA PARTE

APPROFONDIMENTI MATEMATICI SUL MODELLO DI KLEIN

DISTANZA TRA DUE PUNTI

Vediamo come si può definire, nel modello di Klein, la distanza tra due punti in modo tale che la lunghezza di qualunque corda MN di C risulti infinita. Per questo occorre premettere una definizione.

Sia r una retta su cui sia stato stabilito un sistema di ascisse; siano P_1, P_2, P_3, P_4 quattro punti arbitrari di r di ascissa rispettivamente x_1, x_2, x_3, x_4. **Si chiama birapporto dei punti P_1, P_2, P_3, P_4**, e si indica con (P_1, P_2, P_3, P_4), **la quantità $(P_1, P_2, P_3, P_4) = \dfrac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)}$.**[vi]

Ora, **data una qualunque corda MN di C, e su di essa due punti arbitrari A e B, si definisce distanza (non euclidea) tra A e B, e di indica con $\overrightarrow{AB}$, la quantità:**

$\overrightarrow{AB} = k \ln(ABMN)$,[vii] essendo k un arbitrario numero reale diverso da 0.

Il valore assoluto della costante k determina l'unità di misura, mentre dal suo segno dipende l'orientamento (non euclideo) di MN, e quindi anche di AB. Qualora ci interessi la misura del segmento assoluto AB, anziché di quello orientato, avremo ovviamente $\overline{AB} = |k \ln(ABMN)|$. **Se prendiamo in considerazione una circonferenza con centro nell'origine e raggio 1** (di equazione $x^2 + y^2 = 1$)**, con M(-1;0) ed N(1;0), scegliendo** per esempio $\mathbf{k = -\dfrac{1}{\ln 2}}$ otteniamo, ricordando anche il teorema relativo al cambiamento di base dei logaritmi:

$$\overrightarrow{AB} = -\frac{\ln(ABMN)}{\ln 2} = -\log_2(ABMN) = -\log_2 \frac{(x_A - x_M)(x_B - x_N)}{(x_A - x_N)(x_B - x_N)} =$$

[vi] Il termine birapporto é giustificato dal fatto che, come si potrebbe facilmente dimostrare, $(P_1, P_2, P_3, P_4) = \dfrac{\overrightarrow{P_3P_1}}{\overrightarrow{P_4P_1}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{P_4P_2}}{\overrightarrow{P_3P_2}}$.

[vii] Si ricorda che ln x indica il logaritmo naturale, o neperiano, di x, cioè l'esponente da dare ad un particolare numero irrazionale, detto numero di Nepero, indicato con *e* e il cui valore approssimato é 2,718281828459.

$$\mathbf{= -\log_2 \frac{(x_A + 1)(x_B - 1)}{(x_A - 1)(x_B + 1)}.}$$

In particolare, se O(0;0), $\mathbf{A\left(\frac{1}{3};0\right)}$**,** $\mathbf{B\left(\frac{3}{5};0\right)}$**,** (FIGURA 7)

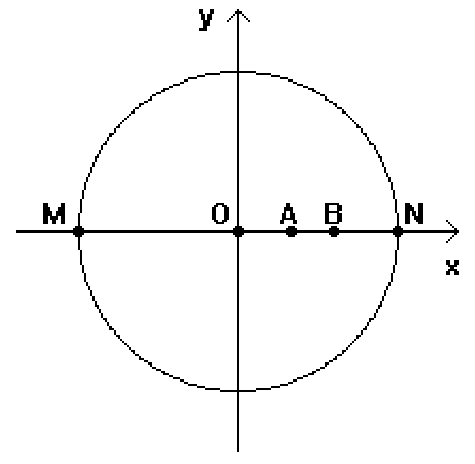

FIGURA 7 - Punti O, A e B.

$$\overrightarrow{OA} = -\log_2 \frac{(x_O + 1)(x_A - 1)}{(x_O - 1)(x_A + 1)} =$$

$$= -\log_2 \frac{(0+1)\left(\frac{1}{3} - 1\right)}{(0-1)\left(\frac{1}{3} + 1\right)} = -\log_2 \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{4}{3}} =$$

$$= -\log_2 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}\right) = -\log_2 \frac{1}{2} = -(-1) = 1.$$

$$\overrightarrow{AB} = -\log_2 \frac{(x_A + 1)(x_B - 1)}{(x_A - 1)(x_B + 1)} = -\log_2 \frac{\left(\frac{1}{3} + 1\right)\left(\frac{3}{5} - 1\right)}{\left(\frac{1}{3} - 1\right)\left(\frac{3}{5} + 1\right)} =$$

$$= -\log_2 \frac{\frac{4}{3}\left(-\frac{2}{5}\right)}{-\frac{2}{3}\frac{8}{5}} = -\log_2 \left(\frac{8}{15} \cdot \frac{15}{16}\right) = -\log_2 \frac{1}{2} = -(-1) = 1.$$

Se indichiamo con $\mathbf{\overrightarrow{AB}_E}$ **la misura euclidea di AB,** troviamo:

$$\overrightarrow{OA}_E = x_A - x_0 = \frac{1}{3};\ \overrightarrow{AB}_E = x_B - x_A = \frac{3}{5} - \frac{1}{3} = \frac{9-5}{15} = \frac{4}{15}.$$

Essendo $\frac{1}{3} = \frac{5}{15} > \frac{4}{15}$, é anche $\mathbf{\overrightarrow{OA}_E > \overrightarrow{AB}_E}$**, mentre** $\mathbf{\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}\ (=1).}$

Troviamo conferma del fatto che la misura di segmenti che al nostro essere bidimensionale appaiono uguali (per esempio, la sua unità di misura), vengono visti da noi, all'esterno, sempre più piccoli man mano che ci si allontana dal centro (euclideo!) della circonferenza, anche se non nella misura ipotizzata, per semplicità, in precedenza: in altre parole**, l'unità di misura di Iper si rimpicciolisce**, insieme a tutti gli altri oggetti**, man mano che si avvicina al bordo del cerchio**, anche se, come già detto, questo non può essere rilevato dall'interno del sistema (Iper), ma solo dall'esterno (osservatore del mondo euclideo in cui anche quello non euclideo di Iper é immerso).

LE RETTE HANNO LUNGHEZZA INFINITA

Se proviamo ad usare la definizione data di lunghezza di un segmento per misurare la lunghezza di una retta orientata del modello di Klein, per esempio $\overrightarrow{MN}$, otteniamo:

$$\overrightarrow{MN} = -\log_2 \frac{(x_M+1)(x_N-1)}{(x_M-1)(x_N+1)} = -\log_2 \frac{(-1+1)(1-1)}{(-1-1)(1+1)} = -\log_2 \frac{0\cdot 0}{-2\cdot 2} = -\log_2 0.$$

Questa espressione non ha significato, in quanto non esiste il logaritmo di zero: infatti, qualunque esponente dessimo alla base 2, la potenza risulterebbe sempre positiva, e quindi in particolare diversa da zero. Se tuttavia prendiamo due punti M' ed N' appartenenti all'asse x, interni al segmento MN e molto vicini rispettivamente ad M e ad N (FIGURA 8; per esempio potrebbe essere M'(-0,999;0) ed N'(0,999;0)), le quantità x_M+1 e x_N-1 al numeratore sono sostituite da $x_{M'}+1$ e $x_{N'}-1$, molto vicine a zero ma non nulle (nell'esempio fatto sarebbe $x_{M'}+1=-0,999+1=0,001$ e $x_{N'}-1=0,999-1=-0,001$); in particolare la prima quantità risulta positiva, mentre la seconda é negativa. Poiché il denominatore non varia molto, l'argomento del logaritmo, $\frac{(x_{M'}+1)(x_{N'}-1)}{(x_{M'}-1)(x_{N'}+1)}$, diventa il rapporto tra un numero negativo (in quanto prodotto tra un numero positivo ed uno negativo) molto vicino a zero ed un numero che, approssimativamente, vale -4. Il risultato é un numero positivo (quoziente tra due numeri negativi) tanto più piccolo quanto più M' ed N' sono vicini ad M ed N. Il logaritmo in base 2 di una quantità positiva che si avvicina sempre di più allo zero é un numero negativo arbitrariamente grande in valore assoluto; cioè, come si dice, tende a -∞ quando M' ed N' tendono rispettivamente

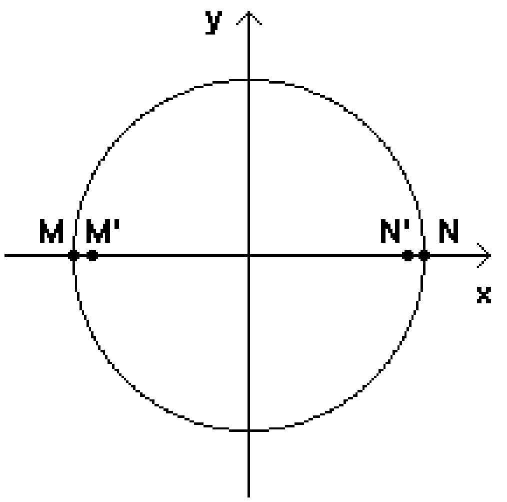

FIGURA 8 - Più avviciniamo M' ed N' rispettivamente ad M ed N, più diventa grande la loro distanza. Passando al limite, la lunghezza di MN risulta infinita.

ad M e ad N. Poiché $\overline{MN}=|\overrightarrow{MN}|=|+\infty|=+\infty$, possiamo dire che **nel modello di Klein le rette hanno lunghezza infinita.**[viii]

LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

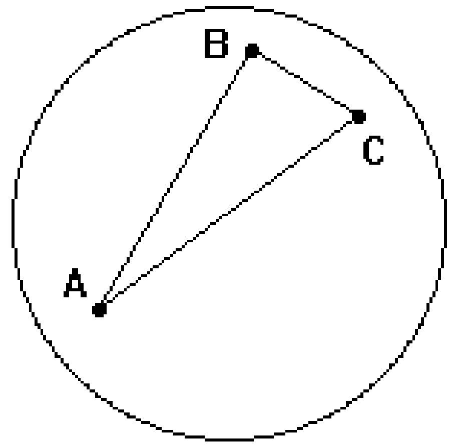

FIGURA 9 - In un triangolo un lato deve sempre essere minore della somma degli altri due.

La definizione data di distanza tra due punti é accettabile se verifica alcune proprietà caratteristiche della distanza euclidea tra due punti, tra cui quella che viene chiamata disuguaglianza triangolare: deve essere $\overline{AC} \leq \overline{AB}+\overline{BC}$ per ogni terna di punti A, B e C; in particolare se A, B e C sono allineati e B é compreso tra A e C deve valere $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$; in caso contrario $\overline{AC}<\overline{AB}+\overline{BC}$. Se i punti A, B e C non sono allineati quest'ultima disuguaglianza esprime il noto postulato che afferma che in ogni triangolo un lato é sempre minore della somma degli altri due (FIGURA 9)**. Per evitare calcoli complessi non dimostreremo la disuguaglianza triangolare, limitandoci a verificarne la validità in due casi particolari.**

I punti **O(0;0),** $\mathbf{A\left(\frac{1}{3};0\right)}$, $\mathbf{B\left(\frac{3}{5};0\right)}$ già presi in considerazione **sono allineati** (appartengono tutti all'asse x) **ed A é compreso tra O e C** (infatti $x_O < x_A < x_B$); **facciamo vedere che $\overline{OB}=\overline{OA}+\overline{AB}$.** Già sappiamo che $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}=1$, quindi

---

[viii] Per chi ha già studiato i limiti possiamo dire, più precisamente, che

$$\overrightarrow{MN}=\lim_{\substack{M'\to M\\ N'\to N}}\overrightarrow{M'N'}=\lim_{\substack{M'\to M\\ N'\to N}}\left[-\log_2\frac{(x_{M'}+1)(x_{N'}-1)}{(x_{M'}-1)(x_{N'}+1)}\right]=-\log_2\frac{0^+\cdot 0^-}{-2\cdot 2}=-\log_2 0^+=-(-\infty)=$$

$=+\infty$.

anche $\mathbf{\overline{OA}=|\overrightarrow{OA}|=1}$ **e** $\mathbf{\overline{AB}=|\overrightarrow{AB}|=1}$. Rimane da dimostrare che $\overline{OB}=1+1=2$. Infatti

$$\mathbf{\overline{OB}=}|\overrightarrow{OB}|=\left|-\log_2\frac{(x_O+1)(x_B-1)}{(x_O-1)(x_B+1)}\right|=\left|\log_2\frac{(0+1)\left(\frac{3}{5}-1\right)}{(0-1)\left(\frac{3}{5}+1\right)}\right|=\left|\log_2\frac{1\cdot\frac{3-5}{5}}{-1\cdot\frac{3+5}{5}}\right|=$$

$$=\left|\log_2\frac{-\frac{2}{5}}{-\frac{8}{5}}\right|=\left|\log_2\left(\frac{2}{5}\,\frac{5}{8}\right)\right|=\left|\log_2\frac{1}{4}\right|=\left|\log_2 2^{-2}\right|=|-2|=\mathbf{2.}$$

Prendiamo adesso in considerazione i punti O(0;0), $\mathbf{A\left(\frac{1}{3};0\right)}$ **e** $\mathbf{C\left(0;\frac{1}{3}\right)}$**, non allineati** in quanto O e A appartengono all’asse x, mentre C é esterno ad esso. Come abbiamo già visto, $\mathbf{\overline{OA}=1.}$ **Possiamo calcolare** $\mathbf{\overline{OC}}$ **utilizzando le ordinate al posto delle ascisse, tenendo presente che gli estremi della corda a cui appartengono O e C sono P(0;-1) e Q(0;1)** (FIGURA 10) **e ottenendo**, come per $\overline{OA}$,

$$\mathbf{\overline{OC}=}|\overrightarrow{OC}|=$$

$$=\left|-\log_2\frac{(y_O-y_P)(y_C-y_Q)}{(y_O-y_Q)(y_C-y_P)}\right|=$$

$$=\left|\log_2\frac{(0+1)\left(\frac{1}{3}-1\right)}{(0-1)\left(\frac{1}{3}+1\right)}\right|=$$

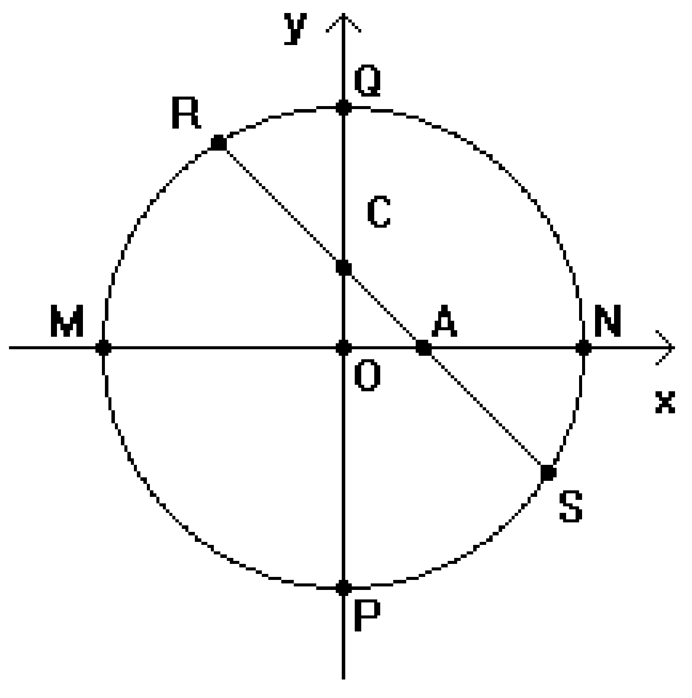

FIGURA 10 - Si possono calcolare le lunghezze dei segmenti AC e OC in funzione dei birapporti (ACRS) e (OCPQ); in quest’ultimo caso si possono utilizzare le ordinate dei punti al posto delle ascisse.

$$=\left|\log_2 \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{4}{3}}\right| = \left|\log_2\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)\right| = \left|\log_2 \frac{1}{2}\right| = |-1| = \mathbf{1.}$$

Per calcolare $\overline{AC}$ occorrono le coordinate degli estremi R ed S della corda che contiene A e C. Per questo motivo calcoliamo l'equazione della retta AC, che poi mettiamo a sistema con l'equazione della circonferenza per trovare appunto R ed S.

L'equazione di AC ha la forma y=mx+q, dove q é l'ordinata dell'intersezione tra la retta e l'asse y, cioè di C: in altre parole q=$\frac{1}{3}$. Possiamo ricavare m imponendo che la retta passi per A, cioè sostituendo nella sua equazione, al posto di x e di y, le coordinate di A. Otteniamo $y_A = mx_A + \frac{1}{3}$, cioè $0 = \frac{1}{3}m + \frac{1}{3}$, da cui m=-1. Mettendo a sistema le equazioni di AC e di $\mathscr{C}$ otteniamo:

$$\begin{cases} y = -x + \frac{1}{3} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x + \frac{1}{3} \\ x^2 + \left(-x + \frac{1}{3}\right)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x + \frac{1}{3} \\ x^2 + x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = -x + \frac{1}{3} \\ 9x^2 + 9x^2 - 6x + 1 - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x + \frac{1}{3} \\ 18x^2 - 6x - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x + \frac{1}{3} \\ 9x^2 - 3x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = -x + \frac{1}{3} \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16 \cdot 9}}{18} = \frac{3 \pm \sqrt{9(1+16)}}{18} = \frac{3 \pm 3\sqrt{17}}{18} = \frac{3(1 \pm \sqrt{17})}{18} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{6} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1 \pm \sqrt{17}}{6} + \frac{1}{3} = \frac{-1 \mp \sqrt{17} + 2}{6} = \frac{1 \mp \sqrt{17}}{6} \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{6} \end{cases}$$

Di conseguenza, essendo $R\left(\frac{1-\sqrt{17}}{6};\frac{1+\sqrt{17}}{6}\right)$ ed $S\left(\frac{1+\sqrt{17}}{6};\frac{1-\sqrt{17}}{6}\right)$,

$$\overline{\mathbf{AC}}=|\overrightarrow{AC}|=\left|-\log_2 \frac{(x_A-x_R)(x_C-x_S)}{(x_A-x_S)(x_C-x_R)}\right| = \left|-\log_2 \frac{\left(\frac{1}{3}-\frac{1-\sqrt{17}}{6}\right)\left(0-\frac{1+\sqrt{17}}{6}\right)}{\left(\frac{1}{3}-\frac{1+\sqrt{17}}{6}\right)\left(0-\frac{1-\sqrt{17}}{6}\right)}\right|=$$

$$=\left|-\log_2 \frac{\frac{2-1+\sqrt{17}}{6}\left(-\frac{1+\sqrt{17}}{6}\right)}{\frac{2-1-\sqrt{17}}{6}\left(-\frac{1-\sqrt{17}}{6}\right)}\right| = \left|-\log_2 \frac{\frac{1+\sqrt{17}}{6}\left(-\frac{1+\sqrt{17}}{6}\right)}{\frac{1-\sqrt{17}}{6}\left(-\frac{1-\sqrt{17}}{6}\right)}\right|=$$

$$=\left|-\log_2\left[\frac{1+\sqrt{17}}{6}\left(-\frac{1+\sqrt{17}}{6}\right)\frac{6}{1-\sqrt{17}}\left(-\frac{6}{1-\sqrt{17}}\right)\right]\right|=\left|-\log_2\frac{(1+\sqrt{17})^2}{(1-\sqrt{17})^2}\right|=$$

$$=\left|-\log_2\left(\frac{\sqrt{17}+1}{\sqrt{17}-1}\right)^2\right|=\left|-2\log_2\frac{\sqrt{17}+1}{\sqrt{17}-1}\right|=\left|-2\log_2\left(\frac{\sqrt{17}+1}{\sqrt{17}-1}\frac{\sqrt{17}+1}{\sqrt{17}+1}\right)\right|=$$

$$=\left|-2\log_2\frac{(\sqrt{17}+1)^2}{17-1}\right|=\left|-2\log_2\left(\frac{\sqrt{17}+1}{4}\right)^2\right|=\left|-2\cdot 2\log_2\frac{\sqrt{17}+1}{4}\right|=$$

$$=\left|-4[\log_2(\sqrt{17}+1)-\log_2 4]\right|=\left|-4[\log_2(\sqrt{17}+1)-2]\right|=\left|-4\log_2(\sqrt{17}+1)+8\right|\cong$$

$$\cong\left|-4\log_2 5{,}123+8\right|\cong|-4\cdot 2{,}257+8|=|-1{,}428|=\mathbf{1{,}428}.$$

Poiché 1,428<1+1, abbiamo verificato che, in questo caso, $\overline{\mathbf{AC}}<\overline{\mathbf{OA}}+\overline{\mathbf{OC}}$.

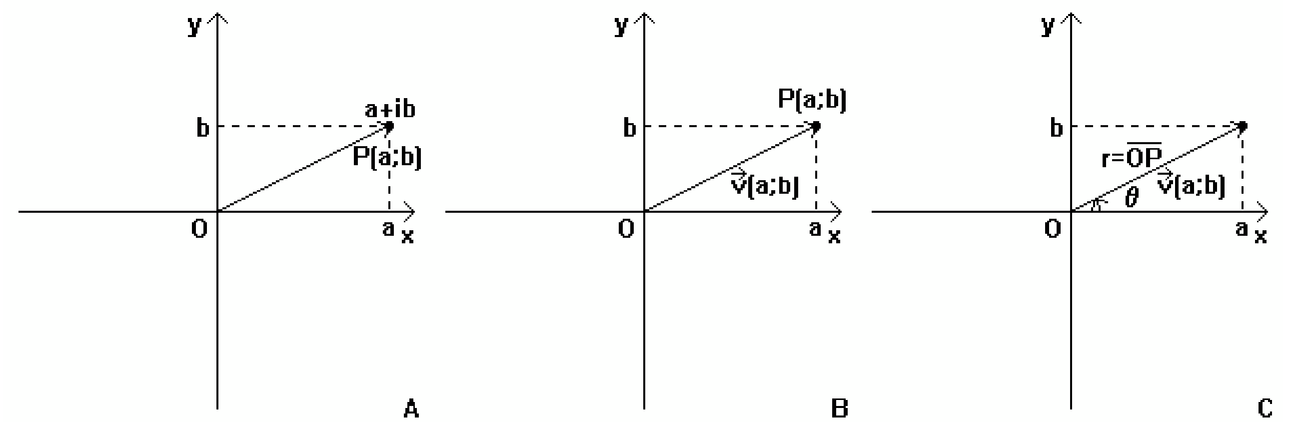

FIGURA 11 - Ogni numero complesso a+ib può essere identificato con il punto P(a;b) (a), o anche con il vettore v(a;b) (b). Quest'ultimo, poi, è determinato quando se ne conoscono il modulo r e l'anomalia θ (c).

CENNI SUI NUMERI COMPLESSI

Prima di definire la misura di un angolo nel nostro modello di geometria non euclidea dobbiamo imparare a calcolare il logaritmo di un numero complesso. **I numeri complessi sono quelli che assumono la forma a+ib, essendo a e b due numeri reali arbitrari e i un** particolare **elemento, detto unità immaginaria, tale che $i^2 = -1$** (in altre parole, $i = \sqrt{-1}$). Sono esempi di numeri complessi 2+3i, $-5 + \sqrt{3}$ i, ma anche -8i (a=0, b=-8) o 7 (a=7, b=0). **a e b sono detti rispettivamente parte reale e parte immaginaria di a+ib.** Dato un numero complesso, sono univocamente determinate le sue parti reale e immaginaria, e viceversa; di conseguenza **possiamo rappresentare i numeri complessi in un particolare piano, in cui gli assi delle ascisse e delle ordinate vengono chiamati rispettivamente asse reale e asse immaginario, e sono indicati con i simboli Re, Im. a+ib é associato al punto P(a;b), stabilendo una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei numeri complessi e quello dei punti del piano** (FIGURA 11A). **Inoltre, a+ib può essere associato al vettore $\vec{OP}$** (FIGURA 11B), dove O é, ovviamente, l'origine del sistema di riferimento, determinando questa volta una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei numeri complessi e quello dei vettori applicati in O (o, più precisamente, quello dei segmenti orientati aventi il primo estremo in O).

Ma **per determinare il vettore sono necessari due elementi: il modulo** $r=\overline{OP}$ **del vettore, e l'angolo orientato** θ **tra il semiasse positivo delle ascisse e** $\overrightarrow{OP}$ (FIGURA 11C)**. Chiamiamo rispettivamente modulo e anomalia del numero complesso i numeri r e** θ**; si può dimostrare che** $\mathbf{r=\sqrt{a^2+b^2}}$**,** $\mathbf{tg\theta=\frac{b}{a}}$**. Inoltre a+ib=r(cos**$\theta$**+isen**$\theta$**).** Quest'ultima uguaglianza viene detta forma goniometrica di un numero complesso. **Per esempio,** se $a=1,\ b=\sqrt{3}$, $r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+3}=2$ e quindi:

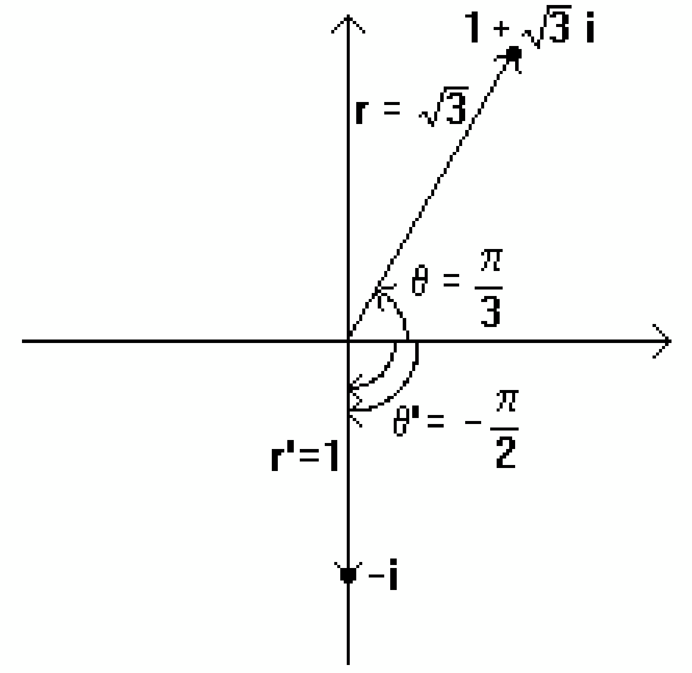

FIGURA 12 – Modulo e anomalia di –i e $1+\sqrt{3}$ **i.**

$$1+\sqrt{3}\,i=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\ \mathrm{sen}\frac{\pi}{3}\right)$$ (FIGURA 12)**.**

Se invece a=0, b= -1, $r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{0+1}=1$, da cui:

$$\mathbf{-i=}\,0-i=1(0-1\cdot i)\,\mathbf{=1\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\ sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]}$$ (FIGURA 12)**.**

Quindi modulo e anomalia valgono rispettivamente 2 e $\frac{\pi}{3}$ per $1+\sqrt{3}$ i, **1 e** $\mathbf{-\frac{\pi}{2}}$ **per - i.**

Definiamo ora il logaritmo naturale di un numero complesso. Senza entrare nei dettagli, **ln(a+ib)=lnr+(**θ**+2k**π**)i,**[ix] **essendo k un arbitrario numero intero** (k=0; ±1; ±2...), **ed r e** θ **rispettivamente modulo e anomalia del numero**

[ix] Si noti che il logaritmo di un numero complesso viene definito in funzione, tra l'altro, dell'espressione lnr, che indica il logaritmo del numero reale r, e di cui già conosciamo il significato; inoltre, essendo r il modulo di un vettore (quindi positivo o nullo), il logaritmo di r esiste sempre, purché sia r≠0, cioè a+ib≠0. In definitiva**, nel campo complesso esiste il logaritmo di qualunque numero diverso da 0** (compresi i numeri reali negativi)**.**

complesso. A differenza di quanto accade con i numeri reali, esistono quindi infiniti logaritmi (uno per ogni valore intero di k) dello stesso numero; **chiameremo logaritmo principale, indicandolo con il simbolo Ln(a+ib), quello corrispondente a k=0, se l'anomalia é scelta in modo che $-\pi < \theta \le \pi$.** D'ora in avanti ci riferiremo sempre al logaritmo principale. Riportiamo alcuni esempi di calcolo:

$$\mathrm{Ln}(1+\sqrt{3}\,i) = \mathrm{Ln}\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{6}\right)\right] = \ln 2 + \frac{\pi}{6}i;$$

$$\mathbf{Ln(-i) =} \mathrm{Ln}\left\{1\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\} = \ln 1 - \frac{\pi}{2}i = 0 - \frac{\pi}{2}i \mathbf{= -\frac{\pi}{2}i.}$$

MISURA DI ANGOLI

Abbiamo definito birapporto di quattro punti P_1, P_2, P_3, P_4 la quantità $(P_1, P_2, P_3, P_4) = \dfrac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)}$. Ha senso calcolare il birapporto di quattro rette? La risposta é affermativa se possiamo attribuire ad una retta qualcosa di analogo all'ascissa di un punto. Ebbene, esiste un parametro che individua una retta, così come l'ascissa individua un punto su di una retta: si tratta del coefficiente angolare, purché le quattro rette abbiano uno stesso punto in comune. Infatti una retta é univocamente determinata una volta assegnati, di essa, un punto e la direzione. Più in generale, data l'equazione di un fascio proprio di rette contenente un solo parametro (per esempio, (m-1)x+(4m+5)y+(2-m)=0), esiste una corrispondenza biunivoca tra i valori del parametro m e le rette del fascio, così come esiste tra i punti di una retta e le loro ascisse.[x] **Possiamo** perciò **definire birapporto di quattro rette r_1, r_2, r_3, r_4 di un fascio proprio, la cui equazione sia funzione di un solo parametro m, la quantità**

$$\mathbf{(r_1, r_2, r_3, r_4) = \frac{(m_1 - m_3)(m_2 - m_4)}{(m_1 - m_4)(m_2 - m_3)}.}$$

---

[x] Più esattamente, esiste sempre una retta del fascio, detta retta esclusa dal fascio, a cui non é associato nessun valore finito di m; tuttavia é possibile associarle il valore m=∞. Analogamente ad una retta é possibile aggiungere un punto, detto punto improprio della retta, infinitamente distante da tutti gli altri punti della retta, e a cui associamo come ascissa x=∞. In questo modo la corrispondenza biunivoca tra rette e valori di m (finiti o infiniti) é completa, così come quella tra punti di una retta e loro ascisse.

Per esempio, dato il fascio di rette di equazione y=mx (rette passanti per l'origine), se le equazioni di r_1, r_2, r_3, r_4 sono, nell'ordine, y=x, y=-x, y=3x e y=5x, e quindi m vale rispettivamente 1, -1, 3 e 5,

$$(r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4) = \frac{(m_1 - m_3)(m_2 - m_4)}{(m_1 - m_4)(m_2 - m_3)} = \frac{(1-3)(-1-5)}{(1-5)(-1-3)} = \frac{-2\cdot(-6)}{-4\cdot(-4)} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}.$$

Abbiamo poi definito la distanza tra A e B in modo che sia proporzionale al birapporto di quattro punti, dei quali i primi due sono proprio A e B, e gli ultimi due gli estremi della corda cui appartengono A e B, cioè gli estremi tra i punti della retta AB che appartengono al cerchio. Analogamente definiremo la misura di un angolo tra due rette r ed s aventi in comune un punto P in modo che sia proporzionale al birapporto tra quattro rette del fascio di rette passanti per P, delle quali le prime due sono proprio r ed s, mentre le ultime due sono le tangenti al cerchio, cioè gli estremi tra le rette che lo intersecano (FIGURA 13).

Si potrebbe pensare che questa definizione non abbia senso, dato che il vertice V dell'angolo é necessariamente interno alla circonferenza, e quindi non esistono tangenti per V ad essa. Tuttavia, se accettiamo che m possa essere un numero complesso, impostando la condizione di tangenza tra il fascio di rette per V e la circonferenza troveremo comunque due valori. Le equazioni che si ottengono sostituendo al parametro questi valori sono le tangenti (complesse) per V alla circonferenza. Per esempio, se V coincide con l'origine, e quindi il fascio di rette é y=mx, si ha:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = mx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + m^2x^2 = 1 \\ y = mx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1+m^2)x^2 - 1 = 0 \\ y = mx. \end{cases}$$

Imponendo nella prima equazione la condizione di tangenza (Δ=0),

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - (-1)(1+m^2) = 0 \Rightarrow 1+m^2 = 0 \Rightarrow m^2 = -1 \Rightarrow m = \pm i$$

Definiamo quindi **angolo tra due rette r ed s, aventi un punto interno a C in comune, la quantità**

$$\widehat{rs} = \frac{k}{i}\mathrm{Ln}(r,s,t,t') = \frac{k}{i}\mathrm{Ln}\frac{(m_r - m_t)(m_s - m_{t'})}{(m_r - m_{t'})(m_s - m_t)},$$ **dove k é un arbitrario numero reale non nullo, t e t' rappresentano le tangenti complesse alla circonferenza e i é l'unità immaginaria.**

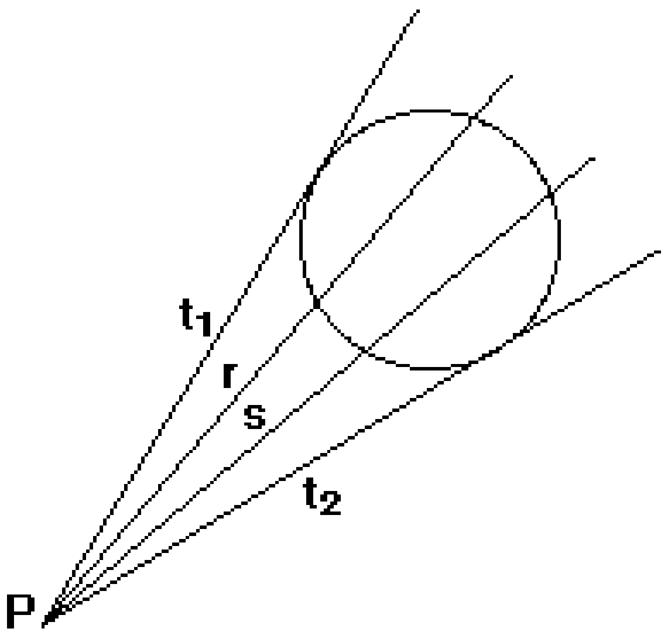

FIGURA 13 - La misura di un angolo formato da due rette r ed s aventi un punto P in comune si può definire in funzione del birapporto tra r, s e le 'ultime' rette del fascio di centro P che non intersecano la circonferenza, cioé le tangenti t_1 e t_2. Tutto ciò non é privo di significato anche se P é interno alla circonferenza, purchè si accetti che i parametri associati a t_1 e t_2 possano essere numeri complessi.

Anche in questo caso il modulo e il segno di k determinano rispettivamente l'unità di misura degli angoli e il verso (orario oppure antiorario) in cui vanno considerati positivi. Nel seguito useremo il valore $k=-\frac{1}{2}$. Si noti che, a differenza della definizione di distanza tra due punti, compare il logaritmo principale, perché l'argomento é un numero complesso; inoltre, si divide k per i in modo che il risultato sia un numero reale.

Per esempio, per calcolare l'angolo $x\hat{}b$ tra l'asse x e la bisettrice b del primo e del terzo quadrante, di equazione rispettivamente y=0 e y=x, che per un osservatore euclideo vale $\frac{\pi}{4}$, dobbiamo tenere presente che le due rette si ottengono dal fascio y=mx attribuendo ad m i valori 0 e 1 e che, come abbiamo visto, le tangenti per l'origine alla circonferenza C hanno coefficiente angolare $m=\pm i$. Ricordando, tra l'altro, che $\mathrm{Ln}(-i)=-\frac{\pi}{2}i$, si ha:

$$x\hat{}b=\frac{-\frac{1}{2}}{i}\mathrm{Ln}\frac{(m_x-m_t)(m_b-m_{t'})}{(m_x-m_{t'})(m_b-m_t)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{i}\mathrm{Ln}\frac{(0-i)(1-(-i))}{(0-(-i))(1-i)}=$$

$$=-\frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\frac{-i(1+i)}{i(1-i)}=-\frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\left[\frac{-(1+i)}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}\right]=-\frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\frac{-(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=$$

$$=-\frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\frac{-(1+2i+i^2)}{1-i^2}=-\frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\frac{-(1+2i-1)}{1-(-1)}=-\frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\frac{-2i}{2}=-\frac{1}{2i}\mathrm{Ln}(-i)=$$

$$=-\frac{1}{2i}\left(-\frac{\pi}{2}i\right)=\frac{\pi i}{4i}=\frac{\pi}{4}.$$

I MOVIMENTI RIGIDI DEL PIANO

Abbiamo ricordato alcune nozioni sui numeri complessi, definendone modulo e anomalia; abbiamo imparato a calcolare il logaritmo di un numero complesso e il birapporto di quattro rette, per poi scoprire che un angolo che per un osservatore euclideo misura $\frac{\pi}{4}$, vale per un osservatore non euclideo... sempre $\frac{\pi}{4}$! Tuttavia ciò é dovuto alla particolare posizione del vertice, posto nel centro della circonferenza, e quindi equidistante, in senso euclideo, da tutti i punti del bordo di $\mathcal{C}$. Un angolo ottenuto traslando $x\hat{b}$, che per noi misura ancora $\frac{\pi}{4}$, non sarà più tale per il nostro amico Iper. Ci si può rendere conto intuitivamente del motivo lasciando per un attimo da parte la nostra circonferenza, e ricordando cosa succede cambiando l'unità di misura in modo diverso sui due assi. Se, per esempio, quadruplichiamo le ordinate e raddoppiamo le ascisse, i punti (0;0), (1;1), (2;2), (3;3) appartenenti alla bisettrice del primo e del terzo quadrante, di equazione y=x, diventano (0;0), (2;4), (4;8), (6;12). E' evidente che l'ordinata di questi punti é sempre doppia dell'ascissa, cioè l'equazione della retta diventa y=2x. Invece i punti (-3;0), (-1;0), (1;0), (3;0) dell'asse x, di equazione y=0, diventano (-6;0), (-2;0), (2;0), (6;0), che appartengono sempre all'asse x. In altre parole, mentre un lato dell'angolo non cambia, l'inclinazione dell'altro viene modificata, cambiando di conseguenza il valore dell'angolo $x\hat{b}$. D'altra parte, questo é proprio quello che succede nel nostro modello traslando un angolo:[xi] l'unità di misura viene modificata in un modo che dipende dalla distanza euclidea del vertice dal bordo del cerchio, e quindi in modo diverso nelle varie direzioni: il centro é l'unico punto che ha la stessa distanza euclidea da qualunque punto del bordo.

[xi] Ricordiamo che una traslazione é un movimento rigido del piano (cioè una legge che, pur spostando i punti, lascia inalterate distanze e gli angoli) che trasforma una retta in una retta ad essa parallela.

Come possiamo calcolare, per esempio, l'angolo $x\hat{b}'$ formato dall'asse x e dalla parallela alla bisettrice del primo e del terzo quadrante passante per $\left(\frac{3}{5};0\right)$, di equazioni rispettivamente y=0 e $y = x - \frac{3}{5}$? Non possiamo usare l'equazione del fascio di rette $y - y_0 = m(x - x_0)$, ottenuta da y=mx per traslazione, che, come abbiamo già detto, non lascia inalterati gli angoli (e, d'altra parte, non trasforma neanche tutti i punti interni al cerchio in punti interni al cerchio). Dobbiamo perciò trovare una legge che, trasformando punti interni a $\mathcal{C}$ in punti interni a $\mathcal{C}$, lasci inalterate distanza e angoli non euclidei, e applicarla alle rette y=0 e y=x. Solo allora conosceremo i parametri delle nuove rette, e quindi potremo calcolarne il birapporto necessario per determinare la misura non euclidea di $x\hat{b}'$. Ma **per poter fare questo é necessario studiare prima la prospettiva centrale. Chi invece volesse utilizzare subito la legge di questa trasformazione**, senza preoccuparsi di capirne l'origine, **può saltare al paragrafo spostamento di angoli a pag. 38**.

LA PROSPETTIVA CENTRALE

A causa del percorso rettilineo della luce, trascurando per semplicità le complicazioni derivanti dalla visione binoculare (in altre parole, supponendo di usare un solo occhio), tutti i punti allineati con il punto V, detto punto di vista, in cui é situato l'occhio ci appaiono coincidenti. Questo rende comunque bidimensionale l'immagine che ci arriva da un universo che é invece tridimensionale; in particolare, osservando un oggetto situato su un piano orizzontale α, lo vediamo come se fosse situato su un piano verticale β detto quadro: ogni raggio luminoso proveniente da un punto P di α ci appare come se fosse stato generato da un punto P' di β, essendo P e P' allineati con il punto di vista, che a sua volta é esterno ai piani α e β. Questa non é altro che una corrispondenza tra i piani α e β, cioè una legge che associa ad alcuni punti di α certi punti di β. Vediamo ora, senza dimostrarle, alcune proprietà importanti di questa corrispondenza.

1) Ad ogni punto P di α, esclusi quelli della retta o appartenente al piano per V parallelo a β, é associato uno ed un solo punto P' di β, mentre ai punti della retta o non é associato nessun punto di β: infatti la retta PV e il piano β hanno in

comune un solo punto P’ se non sono paralleli, altrimenti sono privi di intersezioni. Viceversa, detta linea d’orizzonte ed indicata con o’ la retta che β ha in comune con il piano passante per V e parallelo ad α, ad ogni punto P’ di β non appartenente ad o’ é associato uno ed un solo punto di α, mentre ai punti di o’ non corrisponde nessun punto di α. E’ chiaro che la corrispondenza sarebbe biunivoca (cioè ad ogni punto P di α verrebbe associato uno ed un solo punto di β, e viceversa) se ad α potessimo aggiungere dei punti da far corrispondere ai punti di o’, e viceversa a β dei punti da associare a quelli di o. I punti supplementari sono chiamati impropri per distinguerli dagli altri, detti punti propri; il piano, con l’aggiunta dei punti impropri, viene chiamato piano proiettivo.

2) Ad ogni retta r di α, tranne o, é associata una retta r’ di β, nel senso che ad ogni punto P di r, tranne eventualmente quello appartenente ad o, corrisponde un punto P’ di r’; viceversa, ad ogni retta r’ di β, tranne o’, é associata una retta r di α, nel senso che ad ogni punto P’ di r’, tranne eventualmente quello appartenente ad o’, corrisponde un punto P di r. Se vogliamo rendere biunivoca la corrispondenza tra le rette dei piani α e β, poiché ai punti di o’ abbiamo associato i punti impropri di α, dobbiamo immaginare che questi ultimi siano situati su di una retta, detta retta impropria di α, a cui é associata la retta o’; analogamente quelli di β costituiscono la retta impropria di β, a cui corrisponde la retta o.

3) Facendo tendere all’infinito un punto variabile P appartenente ad una retta r non perpendicolare a β (cioè aumentando a piacere la sua distanza da un punto X arbitrario, purché fissato una volta per tutte), il suo corrispondente P’ si avvicina sempre di più ad un punto I’ della retta o’. Poiché il punto improprio di r é associato ad I’, é del tutto ragionevole pensare che esso sia infinitamente distante da X: per questo motivo i punti impropri vengono anche chiamati punti all’infinito. Il fatto che quelli di α siano associati ad o’ giustifica inoltre il nome linea d’orizzonte. Come al solito vale anche il viceversa, cioè facendo tendere all’infinito un punto P’ appartenente ad una retta r’ non perpendicolare ad α, il suo corrispondente P si avvicina sempre di più ad un punto della retta o.

4) Detta linea di terra, e indicata con t, la retta comune ai piani α e β, rette parallele tra loro, ma non perpendicolari a t sono associate a rette aventi in comune un punto I della linea d’orizzonte. Poiché, di conseguenza, i loro punti impropri sono tutti associati ad I, se desideriamo che la corrispondenza tra i punti di α e β sia biunivoca occorre che il punto all’infinito di due rette parallele sia comune ad esse. Di conseguenza, nel piano proiettivo, due rette hanno sempre in comune un punto, proprio o improprio a seconda che siano incidenti o parallele.

Se ruotiamo β di 90° rispetto alla linea di terra fino a farlo coincidere con α otteniamo una corrispondenza biunivoca tra punti di α e punti di α, cioè del piano in sé. Si tratta di una legge, chiamata omografia, che trasforma punti in punti e rette in rette, e sulla base di questa proprietà cercheremo la relativa legge.

LE OMOGRAFIE

La geometria analitica ci mostra come sia possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei punti di un piano α e quello delle coppie ordinate di numeri reali, in modo tale che un punto di α possa essere identificato dalle sue due coordinate. Poiché per ogni coppia ordinata di numeri reali esiste un punto proprio associato ad essa, se vogliamo attribuire le coordinate anche ai punti impropri non bastano più due numeri, ma ne occorrono tre. Possiamo sempre scrivere le coordinate di un punto proprio come frazioni aventi lo stesso denominatore, cioè

$$\mathbf{x = \frac{x_1}{x_0},\ y = \frac{x_2}{x_0}.}$$

Chiameremo $\mathbf{x_0}$, $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ coordinate omogenee, e x e y coordinate non omogenee del punto P. Per esempio, se $x = \frac{4}{3},\ y = \frac{7}{3}$, può essere $x_0 = 3,\ x_1 = 4,\ x_2 = 7$, ma anche $x_0 = 6,\ x_1 = 8,\ x_2 = 14$, oppure, poiché le coordinate omogenee sono numeri reali (e non necessariamente interi), $x_0 = \frac{3}{7},\ x_1 = \frac{4}{7},\ x_2 = 1$, e così via. Ad un punto non viene quindi associata una sola terna di numeri reali, poiché x_0, x_1 e x_2 possono essere moltiplicati per una stessa costante non nulla senza alterare i rapporti $\frac{x_1}{x_0}$ e $\frac{x_2}{x_0}$, e quindi x e y. In generale, moltiplicando le coordinate x_0, x_1 e x_2 di un punto per uno stesso numero reale $k \neq 0$ si ottengono i numeri $x'_0 = kx_0$, $x'_1 = kx_1$ e $x'_2 = kx_2$, essendo $\frac{x'_1}{x'_0} = \frac{kx_1}{kx_0} = \frac{x_1}{x_0} = x$, $\frac{x'_2}{x'_0} = \frac{kx_2}{kx_0} = \frac{x_2}{x_0} = y$. Quindi $\mathbf{x_0', x_1', x_2'}$ sono adatte a rappresentare il punto di coordinate (x,y) per qualunque valore non nullo di k: le coordinate di un punto sono determinate non in modo univoco, come accade nel piano ordinario, ma, come si dice, a meno di una costante moltiplicativa arbitraria, purché non nulla. Inoltre per un punto proprio dovrà essere sempre

$x_0 \neq 0$, altrimenti $\frac{x_1}{x_0}$ e $\frac{x_2}{x_0}$ perdono significato, avendo il denominatore nullo, e quindi x e y non sono definite. Tuttavia, quando un punto tende all'infinito, almeno una delle sue coordinate non omogenee diventerà sempre più grande, il che può accadere facendo tendere all'infinito x_1 e x_2 e mantenendo costante x_0, ma anche mantenendo costanti x_1 e x_2 e facendo tendere a zero x_0. Risulta quindi del tutto ragionevole attribuire ai punti impropri $x_0 = 0$. **In generale un punto del piano proiettivo ha tre coordinate; l'unica condizione richiesta é che non si annullino tutte. Ad ogni terna di numeri reali non tutti nulli é associato uno ed un solo punto; due terne ordinate di numeri reali rappresentano invece lo stesso punto se differiscono per una costante moltiplicativa non nulla.**

Poiché nel piano ordinario l'equazione di una retta arbitraria é del tipo ax+by+c=0, con a e b non contemporaneamente nulli, otteniamo $a\frac{x_1}{x_0} + b\frac{x_2}{x_0} + c = 0$; moltiplicando entrambi i membri per x_0 [xii] otteniamo **la forma generale dell'equazione di una retta nel piano proiettivo**, che **é** $\mathbf{cx_0 + ax_1 + bx_2 = 0}$, cioè una arbitraria equazione omogenea di primo grado in x_0, x_1 e x_2. Si osservi che x_0=0 é l'equazione della retta impropria, e che in questo caso a=b=0, c=1. **Non é** quindi **più richiesto che a e b non si annullino contemporaneamente, purché almeno uno dei coefficienti a, b e c sia diverso da zero.** Inoltre, moltiplicando per x_0 le equazioni degli assi x e y (rispettivamente y=0 e x=0, e quindi $\frac{x_2}{x_0} = 0$ e $\frac{x_1}{x_0} = 0$), si ottiene $x_2 = 0$ e $x_1 = 0$.

Inoltre, poiché una omografia deve trasformare rette in rette, le sue equazioni devono essere omogenee di primo grado, cioè

$$\begin{cases} x'_0 = cx_0 + ax_1 + bx_2 \\ x'_1 = c'x_0 + a'x_1 + b'x_2 \\ x'_2 = c''x_0 + a''x_1 + b''x_2 \end{cases}$$

Di conseguenza le coordinate non omogenee di un punto variano secondo le relazioni:

[xii] Si noti che per x_0=0 si ottiene, moltiplicando entrambi i membri dell'equazione della retta per x_0, una soluzione supplementare che ci fornisce le coordinate omogenee del punto improprio della retta.

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x'_1}{x'_0} = \dfrac{c'x_0 + a'x_1 + b'x_2}{cx_0 + ax_1 + bx_2} = \dfrac{\dfrac{c'x_0 + a'x_1 + b'x_2}{x_0}}{\dfrac{cx_0 + ax_1 + bx_2}{x_0}} = \dfrac{c' + a'\dfrac{x_1}{x_0} + b'\dfrac{x_2}{x_0}}{c + a\dfrac{x_1}{x_0} + b\dfrac{x_2}{x_0}} = \dfrac{a'x + b'y + c'}{ax + by + c} \\ y' = \dfrac{x'_2}{x'_0} = \dfrac{c''x_0 + a''x_1 + b''x_2}{cx_0 + ax_1 + bx_2} = \dfrac{\dfrac{c''x_0 + a''x_1 + b''x_2}{x_0}}{\dfrac{cx_0 + ax_1 + bx_2}{x_0}} = \dfrac{c'' + a''\dfrac{x_1}{x_0} + b''\dfrac{x_2}{x_0}}{c + a\dfrac{x_1}{x_0} + b\dfrac{x_2}{x_0}} = \dfrac{a''x + b''y + c''}{ax + by + c} \end{cases}$$

SPOSTAMENTO DI ANGOLI

Nel modello di Klein chiamiamo movimento rigido una omografia che trasforma punti interni a $\mathcal{C}$ in punti interni a $\mathcal{C}$. Consideriamo, come esempio, la trasformazione π di equazioni

$$\begin{cases} \mathbf{x' = \dfrac{3x + 1}{x + 3}} \\ \mathbf{y' = \dfrac{2\sqrt{2}y}{x + 3}} \end{cases}$$

E' una omografia, poiché le sue equazioni si ottengono da quelle generali di questo tipo di trasformazioni, cioè, come abbiamo visto,

$$\begin{cases} \mathbf{x' = \dfrac{a'x + b'y + c'}{ax + by + c}} \\ \mathbf{y' = \dfrac{a''x + b''y + c''}{ax + by + c}} \end{cases}$$

dando ad a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' rispettivamente i valori 1, 0, 3, 3, 0, 1, 0, $2\sqrt{2}$,0. Dimostriamo che π trasforma punti interni a $\mathcal{C}$ in punti interni a $\mathcal{C}$.

Un punto P(x;y) é interno a $\mathcal{C}$ se e solo se la sua distanza (euclidea) dal centro O della circonferenza é minore del raggio; in formule:

$\overline{OP} = \sqrt{(x_P - x_O)^2 - (x_P - x_O)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} < r = 1,$ cioè $\sqrt{x^2 + y^2} < 1.$

Tenendo conto del fatto che sia il radicando, sia i due membri sono sicuramente non negativi, possiamo elevare questi ultimi al quadrato senza introdurre soluzioni estranee. In definitiva il punto P é interno al cerchio se e solo se le sue coordinate verificano la disuguaglianza $x^2 + y^2 < 1$.

Applicando al punto P la trasformazione π otteniamo un punto P'(x';y') tale che

$$\begin{cases} x_{P'} = \dfrac{3x_P + 1}{x_P + 3} = \dfrac{3x+1}{x+3} \\ y_{P'} = \dfrac{2\sqrt{2}y_P}{x_P + 3} = \dfrac{2\sqrt{2}y}{x+3} \end{cases} \text{, cioè } P'\left(\frac{3x+1}{x+3}; \frac{2\sqrt{2}y}{x+3}\right).$$

Dobbiamo dimostrare che, se P appartiene a $\mathcal{C}$, altrettanto accade per P’; cioè che $x^2 + y^2 < 1$ implica $x'^2 + y'^2 < 1$. Infatti

$$x'^2 + y'^2 = \left(\frac{3x+1}{x+3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}y}{x+3}\right)^2 = \frac{9x^2 + 6x + 1}{(x+3)^2} + \frac{8y^2}{(x+3)^2} =$$

$$= \frac{x^2 + 8x^2 + 8y^2 + 6x + 1}{(x+3)^2} = \frac{x^2 + 6x + 1}{(x+3)^2} + \frac{8(x^2 + y^2)}{(x+3)^2}.$$

Ma moltiplicando entrambi i membri della disuguaglianza $x^2 + y^2 < 1$ per la quantità $\frac{8}{(x+3)^2}$, senz’altro positiva essendo x≠-3, si ottiene $\frac{8(x^2 + y^2)}{(x+3)^2} < \frac{8}{(x+3)^2}$; di conseguenza, se $x^2 + y^2 < 1$:

$$x'^2 + y'^2 = \frac{x^2 + 6x + 1}{(x+3)^2} + \frac{8(x^2 + y^2)}{(x+3)^2} < \frac{x^2 + 6x + 1}{(x+3)^2} + \frac{8}{(x+3)^2} =$$

$$= \frac{x^2 + 6x + 9}{(x+3)^2} = \frac{(x+3)^2}{(x+3)^2} = 1.$$

Abbiamo così dimostrato, come proposto, che se $x^2 + y^2 < 1$ anche $x'^2 + y'^2 < 1$: dunque π trasforma punti interni a $\mathcal{C}$ in punti interni a $\mathcal{C}$.

Applichiamo ora questa trasformazione alle rette del fascio di equazione y=mx che si ottengono dando ad m i valori O ed 1 (asse x e bisettrice del primo e del terzo quadrante) già considerate nel paragrafo **misura di angoli** a pag. 30, e che formano un angolo di 45°. Per fare ciò occorre preliminarmente invertire π, cioè esprimere x e y in funzione di x’ e y’ anziché viceversa.

Elaborando la prima equazione ricaviamo

$$x' = \frac{3x+1}{x+3} \Rightarrow x'(x+3) = 3x+1 \Rightarrow x'x + 3x' = 3x+1 \Rightarrow x'x - 3x = 1 - 3x' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x'-3)x = 1 - 3x' \Rightarrow x = \frac{1-3x'}{x'-3}.$$

Utilizzando anche la seconda si ha inoltre:

$$y' = \frac{2\sqrt{2}y}{x+3} \Rightarrow y'(x+3) = 2\sqrt{2}y \Rightarrow y'\left(\frac{1-3x'}{x'-3}+3\right) = 2\sqrt{2}y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'\frac{1-3x'+3(x'-3)}{x'-3} = 2\sqrt{2}y \Rightarrow y'(1-3x'+3x'-9) = 2\sqrt{2}y(x'-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8y' = 2\sqrt{2}y(x'-3) \Rightarrow \frac{-8y'}{2\sqrt{2}(x'-3)} = y \Rightarrow y = \frac{-4y'}{\sqrt{2}(x'-3)}.$$

Dobbiamo sostituire dunque nelle equazioni y=0 e y=x, al posto di x ed y, le quantità

$$\begin{cases} x = \dfrac{1-3x'}{x'-3} \\ y = \dfrac{-4y'}{\sqrt{2}(x'-3)} \end{cases}$$

L'equazione y=0 diventa dunque $\frac{4y'}{\sqrt{2}(3-x')} = 0$, e moltiplicando entrambi i membri per $\frac{\sqrt{2}(3-x')}{4}$, y'=0: in altre parole, l'asse x si trasforma... nell'asse x! Invece la bisettrice del primo e del terzo quadrante diventa $\frac{-4y'}{\sqrt{2}(x'-3)} = \frac{1-3x'}{x'-3}$, e quindi, moltiplicando entrambi i membri per $\sqrt{2}(x'-3)$, $-4y' = \sqrt{2}(1-3x')$. Sviluppando i calcoli si ha $y' = -\frac{\sqrt{2}}{4}(1-3x') \Rightarrow y' = \frac{3}{4}\sqrt{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{4}$. Si tratta di una retta che evidentemente non può formare più un angolo euclideo di 45° con l'asse x, visto che il suo coefficiente angolare non é più 1, ma $\frac{3}{4}\sqrt{2}$. Tuttavia i valori di m che forniscono le rette y'=0 e $y' = \frac{3}{4}\sqrt{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{4}$ sono sempre gli stessi, cioè O e 1. Dato che l'angolo non euclideo tra due rette é stato definito in funzione del birapporto tra esse e le tangenti complesse alla circonferenza, e quindi dei valori del parametro m associati a tali rette, se non cambiano questi valori rimane ovviamente inalterata anche la misura dell'angolo. In definitiva le rette y'=0 e $y' = \frac{3}{4}\sqrt{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{4}$, che formano un angolo euclideo diverso da 45°, determinano un angolo non euclideo che vale invece proprio 45°: quindi la definizione di angolo non euclideo dà, in generale, risultati diversi da quella valida nella geometria euclidea.