CALCOLO DEI LIMITI

1. Limiti che si presentano nella forma $\frac{L}{0}$.

Pur non essendo forme indeterminate (il risultato è indicato convenzionalmente con ∞[i], nel senso che la funzione tende, in valore assoluto, a $+\infty$), il calcolo del segno dell'infinito di queste forme non è banale. Nelle forme che tradizionalmente vengono proposte al liceo, i limiti sinistro e destro esistono, anche se possono spesso differire nel segno. Il problema è quindi quello di calcolare il segno della funzione in un opportuno intorno bucato di x_0 (nelle sue vicinanze). Per fortuna ci viene in aiuto il teorema della permanenza del segno: tutte le quantità che ammettono limite positivo (compreso $+\infty$) sono, se x è abbastanza vicino ad x_0, positive, mentre quelle che ammettono limite negativo (compreso $-\infty$) sono negative se x è abbastanza vicino ad x_0. Poiché il teorema citato non fornisce alcuna informazione sulle quantità che tendono a 0[ii], occorrerà studiare il loro segno per verificarne, caso per caso, il comportamento. Quando una quantità tende a 0 mantenendosi positiva indicheremo il suo limite con il simbolo 0^+, mentre quando tende a 0 mantenendosi negativa lo indicheremo con 0^-.

Esempio:

---

[i] Poiché l'espressione $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$ viene utilizzata convenzionalmente per brevità quando non conosciamo il segno dell'infinito (addirittura, una funzione che tende a ∞ potrebbe ammettere due diversi limiti da sinistra e da destra, e quindi non ammetterne alcuno per x che tende ad x_0), bisogna evitare di sottintendere il segno di $+\infty$, visto che affermare che il limite di un'espressione è $+\infty$ è molto più preciso che non indicarlo con un generico ∞.

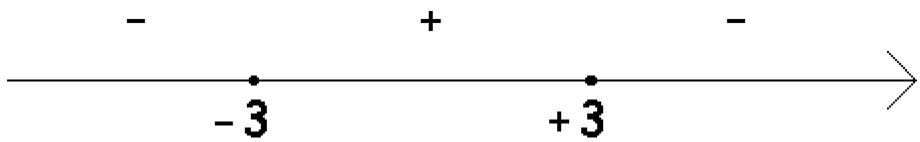
[ii] Praticamente le quantità che tendono a 0 di cui calcolare il segno saranno sempre al denominatore: infatti, se avessimo una forma del tipo $\frac{0}{L}$ il risultato sarebbe 0, e non ci sarebbe alcun bisogno di calcolare il segno del numeratore, mentre $\frac{0}{0}$ richiederebbe prima di tutto l'eliminazione della forma indeterminata.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x+2}{9-x^2}=\frac{3+2}{9-3^2}=\frac{5}{0}=\infty\ .$$

Per calcolare il segno dell'infinito dobbiamo studiare il segno della sola quantità che tende a 0 (ovvero $9-x^2$), e distinguere il limite sinistro da quello destro (anche se non espressamente richiesto dal testo).

$9-x^2=0$ per $x=\pm 3$, e quindi, essendo Δ>0 (l'equazione ha due soluzioni reali e distinte) e a<0, $9-x^2>0$ per valori interni all'intervallo delle due radici (ovvero –3<x<3).

Graficamente:



È evidente che, per x che tende a 3 da sinistra (ovvero per valori minori di 3) il polinomio $9-x^2$ è positivo (e quindi tende a tende a 0^+) perlomeno se x è abbastanza vicina a 3 (deve essere maggiore di –3), mentre quando x tende a 3 da destra (cioè per valori maggiori di 3) $9-x^2$ è negativo, e quindi tende a 0^-.

Abbiamo quindi:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x+2}{9-x^2}=\frac{+5}{0^+}=+\infty\ ;$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x+2}{9-x^2}=\frac{+5}{0^-}=-\infty\ .$$

Per calcolare il segno del risultato abbiamo tenuto presente che il numeratore, visto che tende a 5 che è maggiore di 0, e positivo in un opportuno intorno bucato di 3, mentre il segno del denominatore è quello che abbiamo studiato.

Si noti che, a stretto rigore, essendo diversi i limiti sinistro e destro, non esiste $\lim_{x\to 3}\frac{x+2}{9-x^2}$.

Fine dell'esempio.

È chiaro che, se la quantità che tende a 0 è più complessa (per esempio, se contiene funzioni goniometriche, le relative disequazioni comportano maggiori difficoltà, per cui è bene ripassare tutti i tipi di disequazioni studiate (algebriche, goniometriche, ecc.).

Esempio con disequazione goniometrica:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\cos x-3}{\sqrt{2}\operatorname{sen}x-1}=\frac{\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}-3}{\sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}-1}=\frac{\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-3}{\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-1}=\frac{\frac{2}{2}-3}{\frac{2}{2}-1}=\frac{-2}{0}.$$

Per la determinazione del limite esatto occorre quindi studiare il segno della quantità che tende a 0, ovvero:

$\sqrt{2}\operatorname{sen}x-1>0$**, e quindi**

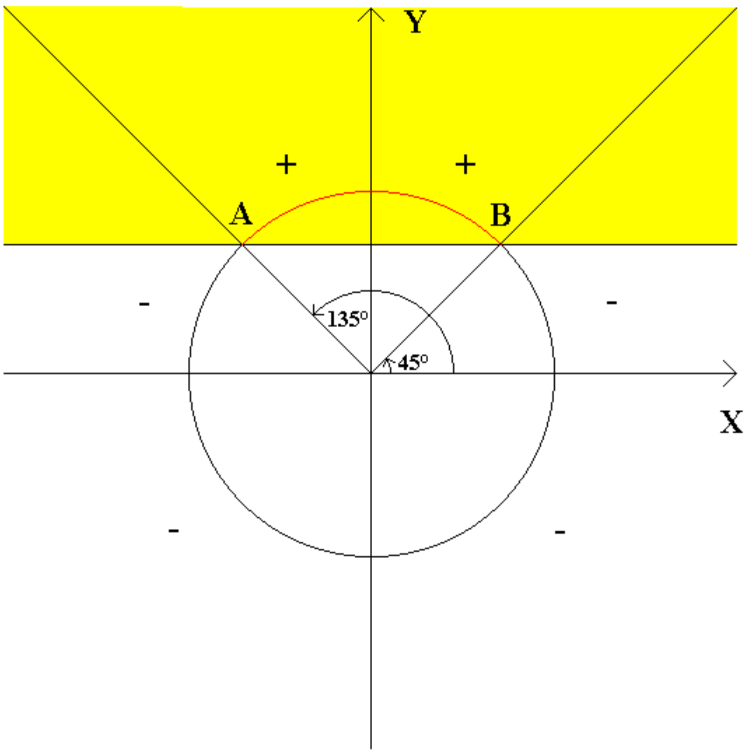
$$\operatorname{sen}x>\frac{1}{\sqrt{2}};\ \operatorname{sen}x>\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}};\ \operatorname{sen}x>\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ricordiamo che senx è, per definizione, l'ordinata del punto di intersezione P tra il secondo lato dell'angolo orientato x (avente il primo lato coincidente con il semiasse positivo delle x) e la circonferenza goniometrica (ovvero una circonferenza con centro nell'origine e raggio 1). Poniamo quindi $Y=\operatorname{sen}x$ (il seno è l'ordinata); la disequazione $\operatorname{sen}x>\frac{\sqrt{2}}{2}$ diventa $Y>\frac{\sqrt{2}}{2}$. Mettiamo a sistema la disequazione ottenuta con l'equazione della circonferenza goniometrica $X^2+Y^2=1$, dato che ad essa deve appartenere il punto P. ATTENZIONE! X (maiuscolo) qui è cosa diversa da x (minuscolo): la prima rappresenta l'ascissa di P (praticamente, il coseno di x), la seconda l'angolo.

$$\begin{cases} Y>\frac{\sqrt{2}}{2} \\ X^2+Y^2=1 \end{cases}.$$

Se un'equazione rappresenta, di norma, una linea nel piano cartesiano, una disequazione può essere associata ad un'intera zona del piano (analogamente a quando, in una cartina geografica, identifichiamo la zona occupata dall'Italia, o dall'Asia, o magari al comune di Roma). Come nella cartina, riusciamo ad identificare una zona del piano quando ne conosciamo i confini (l'Italia confina ad Ovest con la Francia, a Nord con Svizzera ed Austria, ecc.). IL CONFINE DEL ">" (o anche di "<", "≤" e "≥") È L'UGUALE: infatti un numero finisce di essere, per esempio, minore di 3, quando diventa

uguale a 3. Per capire cosa rappresenta $Y>\frac{\sqrt{2}}{2}$, dobbiamo prima studiare quindi $Y=\frac{\sqrt{2}}{2}$, o meglio il sistema $\begin{cases} Y=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ X^2+Y^2=1 \end{cases}$.
Questa è l'equazione di una retta parallela all'asse X (ha la forma $Y=costante$), che interseca la circonferenza goniometrica in due punti (non ci interessa calcolarne le coordinate, ma solo determinarli graficamente); dalla figura si vede chiaramente che $Y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ corrisponde alle soluzioni x=45° $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ e x=135° $\left(\frac{3}{4}\pi\right)$. D'altronde, se $Y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ rappresenta una retta parallela all'asse X (l'insieme dei punti che hanno la stessa



ordinata), $Y>\frac{\sqrt{2}}{2}$ è il semipiano delimitato da tale retta che si trova al di sopra di essa. Come mettendo a sistema le equazioni

$Y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $X^2+Y^2=1$ troviamo i punti comuni alle due linee, le soluzioni di $\begin{cases} Y>\frac{\sqrt{2}}{2} \\ X^2+Y^2=1 \end{cases}$ sono i punti comuni al semipiano $Y>\frac{\sqrt{2}}{2}$ e alla circonferenza goniometrica. Otteniamo quindi l'insieme dei punti della circonferenza compresi tra B e A, congiungendo i quali ricaviamo i secondi lati degli angoli soluzione. Tenendo anche presente che il primo lato degli angoli deve essere il semiasse positivo delle x, le soluzioni sono quelle comprese tra $\frac{\pi}{4}$ (punto B) e $\frac{3}{4}\pi$ (punto A). In realtà, in questo caso non c'è neanche bisogno di scrivere le soluzioni: a noi interessa sapere il segno di $\sqrt{2}senx-1$ nelle vicinanze di 45° $\left(\frac{\pi}{4}\right)$; ebbene, dalla figura qui sopra si evince che se x tende a $\frac{\pi}{4}$ da sinistra $\sqrt{2}senx-1<0$, mentre da destra $\sqrt{2}senx-1>0$.

ATTENZIONE! Non confondete il fatto che diciamo che x tende ad un certo valore da sinistra o da destra con la sinistra e la destra del grafico utilizzato per risolvere la disequazione goniometrica! Muovendoci a destra in questo grafico facciamo aumentare la X (maiuscola), cioè il coseno dell'angolo x, e non x (minuscolo), che è l'angolo: quest'ultimo cresce facendo ruotare il secondo lato dell'angolo in senso antiorario, NON necessariamente verso destra. Quando diciamo che x tende a $\frac{\pi}{4}$ da destra intendiamo che si avvicina a questo valore mantenendosi maggiore di $\frac{\pi}{4}$. Per esempio, possiamo immaginare x=46° (poco più di 45°). Quindi:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\frac{\sqrt{2}cosx-3}{\sqrt{2}senx-1}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

Quando invece diciamo che x tende a $\frac{\pi}{4}$ da sinistra intendiamo che si avvicina a questo valore mantenendosi

minore di $\frac{\pi}{4}$. Per esempio, possiamo immaginare x=44° (poco meno di 45°). Quindi:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}^-} \frac{\sqrt{2}\cos x - 3}{\sqrt{2}\,\mathrm{sen}x - 1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

Si noti che, a stretto rigore, essendo diversi i limiti sinistro e destro, non esiste $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\cos x - 3}{\sqrt{2}\,\mathrm{sen}x - 1}$.

Esercizi:

1) $\lim_{x \to -2} \frac{x^2+4}{x^2-4}$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x + 1}{\mathrm{sen}x}$

3) $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{2\,\mathrm{sen}x - 1}$

2. Limite all'infinito di un polinomio.

Danno luogo, spesso, ad una forma indeterminata del tipo $+\infty - \infty$, e si risolvono mettendo in evidenza il termine di grado massimo[iii]. Si ricordi che tutte le quantità del tipo $\frac{L}{\infty^n}$, con n>0, danno come risultato 0.

Esempio:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(5x^3 - 8x^2 + 2x - 1\right) = \lim_{x \to -\infty} \left[x^3 \left(\frac{5x^3}{x^3} - \frac{8x^2}{x^3} + \frac{2x}{x^3} - \frac{1}{x^3} \right) \right] =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left[x^3 \left(5 - \frac{8}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) \right] =$$

[iii] Si tenga presente che mettere in evidenza, per esempio, x^3, significa moltiplicare per tale quantità la funzione di cui si sta calcolando il limite, e quindi ogni termine del polinomio va diviso per la quantità messa in evidenza, per non alterare il valore della funzione.

$$=(-\infty)^3\left(5-\frac{8}{-\infty}+\frac{2}{(-\infty)^2}-\frac{1}{(-\infty)^3}\right)=-\infty\cdot(5-0+0-0)=$$

$$=-\infty\cdot 5=-\infty\,.$$

Esercizi:

4) $\lim_{x\to-\infty}\left(8x^4+3x^3-x+9\right)$

5) $\lim_{x\to+\infty}\left(-3x^4+5x^3+3x^2+2x-13\right)$

3. Limite all'infinito, di una funzione razionale fratta (rapporto tra due polinomi).

Danno luogo a forme indeterminate del tipo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, e spesso, al numeratore o al denominatore, anche forme del tipo $+\infty-\infty$. Si risolvono mettendo in evidenza, sia al numeratore che al denominatore, i rispettivi termini di grado massimo, per poi semplificare quanto possibile.

Esempio:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-4x^2+x-1}{-3x^2-4x+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(-3-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{-3-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{+\infty\left(1-\frac{4}{+\infty}+\frac{1}{(+\infty)^2}-\frac{1}{(+\infty)^3}\right)}{-3-\frac{4}{+\infty}+\frac{5}{(+\infty)^2}}=$$

$$=\frac{+\infty(1-0+0-0)}{-3-0+0}=\frac{+\infty}{-3}=-\infty\,.$$

Esercizi:

6) $\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2-3x+8}{-2x^2+x-3}$

7) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-2x+1}{-2x^3+5x^2-7x+4}$

8) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{7x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 3}{x^2 - x + 9}$

9) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^3 - x^2 + 9x - 8}{-2x^3 + 6x^2 - x + 11}$

4. Limite all'infinito di una funzione irrazionale intera o fratta (come 2 e 3, ma con in più almeno un termine che contiene la x sotto radice).

Anche queste forme danno luogo a forme indeterminate del tipo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ e $+\infty-\infty$. Si risolvono, come nei casi precedenti, mettendo in evidenza i termini di grado massimo di numeratore e denominatore (o del solo numeratore, se la funzione non è fratta), e semplificando ove possibile, ma tenendo anche presenti le seguenti considerazioni:

a) una potenza di x presente sotto radice quadrata equivale ad una con esponente dimezzato (più in generale con esponente diviso per l'indice della radice). Per esempio, nelle espressioni $\sqrt{3x^4+5x^3-6x+3}$, $\sqrt{x-3}$ e $\sqrt[3]{5x^3+x^2-x+5}$, il termine di grado massimo è rispettivamente $\sqrt{x^4}=x^2$, $\sqrt{x}$ e $\sqrt[3]{x^3}=x$.

b) Con particolare riferimento alle radici quadrate (regola analoga vale per tutte quelle con indice pari) l'espressione $\sqrt{9}$ indica il numero POSITIVO O NULLO che elevato al quadrato dà 9; in altre parole, $\sqrt{9}=+3$, mentre se scriviamo $-\sqrt{9}$ intendiamo –3. Quindi NON È SEMPRE VERO che $\sqrt{x^2}=x$, essendo il primo termine, per definizione, positivo o nullo, mentre x può anche risultare negativo. Per esempio, se x=-2, $\sqrt{x^2}=\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=+2=-(-2)$, e quindi in questo caso $\sqrt{x^2}$ NON è uguale ad x, ma a –x. In generale, se x≥0 $\sqrt{x^2}=x$, mentre se x<0 $\sqrt{x^2}=-x$ (o $-\sqrt{x^2}=x$, che è lo stesso). Se questo modo di procedere non risulta familiare, si consiglia vivamente di non saltare i passaggi, soprattutto quando x tende a $-\infty$ (e quindi è negativo).

c) Poiché non esiste radice dei numeri negativi, qualora il temine di grado massimo fosse una potenza dispari di x sotto radice quadrata (o, più in generale, con indice pari), non

potremmo mettere in evidenza $\sqrt{x}$ (che non esiste se x<0, come accade per esempio se x tende a $-\infty$), ma $\sqrt{-x}$ (l'opposto di un numero negativo è positivo).

d) Nessuno dei problemi indicati alle lettere b) e c) sussiste se la radice ha indice dispari: per esempio, $\sqrt[3]{x^3}=x$; inoltre si può sempre mettere in evidenza (se necessario) $\sqrt[3]{x}$ anche se x è negativo.

Esempio:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{9x^2-4}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{x}{x}-\frac{\sqrt{9x^2-4}}{x}\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{x}{x}-\frac{\sqrt{9x^2-4}}{\sqrt{x^2}}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(1-\sqrt{\frac{9x^2-4}{x^2}}\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(1-\sqrt{\frac{9x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(1-\sqrt{9-\frac{4}{x^2}}\right)\right]=$$

$$=+\infty\cdot\left(1-\sqrt{9-\frac{4}{(+\infty)^2}}\right)=+\infty\cdot\left(1-\sqrt{9-0}\right)=+\infty\cdot(-2)=-\infty\,.$$

ATTENZIONE!!! Se fosse stato $x\to-\infty$, al posto di x avremmo dovuto sostituire $-\sqrt{x^2}$, e NON $\sqrt{x^2}$!

Segui bene i passaggi nel seguente esempio:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{9x^2-4}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(\frac{x}{x}-\frac{\sqrt{9x^2-4}}{x}\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(\frac{x}{x}-\frac{\sqrt{9x^2-4}}{-\sqrt{x^2}}\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(1+\sqrt{\frac{9x^2-4}{x^2}}\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(1+\sqrt{\frac{9x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(1+\sqrt{9-\frac{4}{x^2}}\right)\right]=$$

$$=-\infty\cdot\left(1+\sqrt{9-\frac{4}{(+\infty)^2}}\right)=-\infty\cdot\left(1+\sqrt{9-0}\right)=-\infty\cdot(+4)=-\infty\,.$$

Altro esempio:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\sqrt{2-x}}{x+\sqrt{4x^2-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{-x}\left(\frac{2}{\sqrt{-x}}-\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{-x}}\right)}{x\left(\frac{x}{x}+\frac{\sqrt{4x^2-x}}{x}\right)}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{-x}\left(\frac{2}{\sqrt{-x}}-\sqrt{\frac{2-x}{-x}}\right)}{x\left(1+\frac{\sqrt{4x^2-x}}{-\sqrt{x^2}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{-x}}{x}\cdot\frac{\frac{2}{\sqrt{-x}}-\sqrt{\frac{2}{-x}-\frac{x}{-x}}}{1-\frac{\sqrt{4x^2-x}}{x^2}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{-x}}{-\sqrt{x^2}}\cdot\frac{\frac{2}{\sqrt{-x}}-\sqrt{\frac{2}{-x}+1}}{1-\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{-\frac{x}{x^2}}\cdot\frac{\frac{2}{\sqrt{-x}}-\sqrt{\frac{2}{-x}+1}}{1-\sqrt{4-\frac{1}{x}}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{\frac{2}{\sqrt{-x}}-\sqrt{\frac{2}{-x}+1}}{1-\sqrt{4-\frac{1}{x}}}\right)=$$

$$-\sqrt{\frac{-1}{-\infty}}\cdot\frac{\frac{2}{\sqrt{-(-\infty)}}-\sqrt{\frac{2}{-(-\infty)}+1}}{1-\sqrt{4-\frac{1}{-\infty}}}=-\sqrt{\frac{1}{+\infty}}\cdot\frac{\frac{2}{\sqrt{+\infty}}-\sqrt{\frac{2}{+\infty}+1}}{1-\sqrt{4-\frac{1}{+\infty}}}=$$

$$=0\cdot\frac{0-\sqrt{0+1}}{1-\sqrt{4-0}}=0\cdot\frac{-1}{-1}=0\,.$$

Esercizi:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9-4x}-x+1}{2x+4-\sqrt{5-4x}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{5-x}-\sqrt{7-3x}}{\sqrt{10-x}-\sqrt{11-2x}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{9+4x^2}}{\sqrt{25x^2-1}-\sqrt{16x^2-9}}$$

1. Forme del tipo $\frac{0}{0}$: funzioni razionali fratte.

Le forme indeterminate del tipo $\frac{0}{0}$ si risolvono semplificando o utilizzando alcuni limiti detti limiti notevoli. Cominciamo a prendere in esame il caso di un quoziente tra due polinomi (funzione razionale fratta). Se, per $x=x_0$, numeratore e denominatore si annullano, entrambi sono divisibili per $x-x_0$. Se possibile, la strada più semplice è quindi quella di scomporre in fattori numeratore e denominatore della frazione, semplificare e sostituire al posto di x il valore x_0.

Esempio:

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\frac{8-8}{4-4}=\frac{0}{0}\ \text{(forma indeterminata)}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x+4}{x+2}=$$

$$=\frac{4+4+4}{2+2}=\frac{12}{4}=3$$

Per scomporre il numeratore è stato usato il prodotto notevole $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ (differenza di due cubi); mentre il denominatore è una differenza di due quadrati, ovvero $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

Altro esempio:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-2x+2}{x^2-1}=\frac{1-1-2+2}{1-1}=\frac{0}{0}\ \text{(forma indeterminata)}$$

Mettendo in evidenza al numeratore x^2 dai primi due termini e -2 dagli altri (raccoglimento parziale) si ha:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-2x+2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)-2(x-1)}{(x+1)(x-1)}.$$

Mettendo in evidenza $x-1$ al numeratore otteniamo

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)-2(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-2)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{x^2-2}{x+1}=\frac{1-2}{1+1}=$$

$$=-\frac{1}{2}.$$

Terzo esempio:

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+3x-2}{2x+4}=\frac{8-6-2}{-4+4}=\frac{0}{0}\ \text{(forma indeterminata)}$$

Per scomporre in fattori un trinomio di secondo grado si può tenere presente la formula $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, dove x_1 e x_2 sono le soluzioni dell'equazione $ax^2+bx+c=0$. Risolviamo quindi l'equazione $2x^2+3x-2=0$.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm 5}{4}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{-3-5}{4}=-2\\[2ex]\dfrac{-3+5}{4}=1\end{array}\right..$$

Di conseguenza $2x^2+3x-2=2(x+2)(x-1)$, e quindi

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+3x-2}{2x+4}=\lim_{x\to -2}\frac{2(x+2)(x-1)}{2(x+2)}=\lim_{x\to -2}(x-1)=$$

$$=-2-1=-3.$$

Quarto esempio:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^5-4x^3+2x^2-4x+3}{5x-5}=\frac{3-4+2-4+3}{5-5}=\frac{0}{0}.$$

In questo caso, non essendo possibile usare i metodi più semplici per scomporre in fattori il numeratore, utilizzeremo il

teorema fondamentale dell'algebra, secondo cui se un polinomio si annulla per $x=x_0$ se e solo se è divisibile per $x-x_0$. Poiché sostituendo 1 al posto di x si annullano sia il numeratore che il denominatore, entrambi risultano divisibili per $x-1$. Possiamo quindi utilizzare la regola di Ruffini per dividere $3x^5-4x^3+2x^2-4x+3$ per $x-1$.

Inseriamo i coefficienti del dividendo nella prima riga (si ricordi di inserire uno zero per ogni termine mancante, nel nostro caso x^4) e il valore di x_0 nello spazio a sinistra (stiamo dividendo per $x-x_0$). Riportiamo il primo termine (+3) della riga superiore in quella inferiore, inseriamo il prodotto dei termini della terza riga per x_0 negli spazi a destra della seconda, e la somma dei primi due valori di una colonna nel suo spazio vuoto. Alla fine del calcolo l'ultima riga conterrà i coefficienti del risultato (tranne l'ultimo valore, che DEVE essere 0 essendo il resto della divisione).

	$+3$	0	-4	$+2$	-4	$+3$
$+1$		$+3$	$+3$	-1	$+1$	-3
	$+3$	$+3$	-1	$+1$	-3	//

E poiché stiamo dividendo un polinomio di 5° grado per uno di 1°, il risultato deve essere di 4°, cioè $\frac{3x^5-4x^3+2x^2-4x+3}{x-1}=3x^4+3x^3-x^2+x-3$, da cui $3x^5-4x^3+2x^2-4x+3=\left(3x^4+3x^3-x^2+x-3\right)\left(x-1\right)$. Il risultato dell'esercizio è perciò il seguente:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^5-4x^3+2x^2-4x+3}{5x-5}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(3x^4+3x^3-x^2+x-3\right)\left(x-1\right)}{5\left(x-1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(3x^4+3x^3-x^2+x-3\right)=3+3-1+1-3=3.$$