INTEGRALI PER PARTI

Premessa teorica (dimostrazione della regola da applicare)

La derivata di una funzione del tipo $y=F(x)g(x)$ va calcolata con la regola di derivazione del prodotto, ed è uguale alla derivata del primo fattore per il secondo inalterato più il primo fattore inalterato per la derivata del secondo, ovvero:

$$D(F(x)g(x))=F'(x)g(x)+F(x)g'(x)\ .$$

Ora, supponiamo che la funzione $y=F(x)$ sia una primitiva di una funzione $y=f(x)$, ovvero che la derivata di $y=f(x)$ sia $y=F(x)$ (ricordiamo che, in questo caso, si usa indicare la primitiva con una lettera maiuscola, e la sua derivata con la stessa lettera minuscola). Otteniamo

$$D(F(x)g(x))=f(x)g(x)+F(x)g'(x)\ .$$

Vogliamo ricavare il termine $f(x)g(x)$. Scambiamo i due membri:

$$f(x)g(x)+F(x)g'(x)=D(F(x)g(x))$$

e portiamo a secondo membro $F(x)g'(x)$:

$$f(x)g(x)=D(F(x)g(x))-F(x)g'(x)$$

Integriamo i due membri rispetto ad x:

$$\int f(x)g(x)\,dx=\int [D(F(x)g(x))-F(x)g'(x)]\,dx$$

Spezziamo l'integrale a secondo membro:

$$\int f(x)g(x)\,dx=\int D(F(x)g(x))\,dx-\int F(x)g'(x)\,dx$$

Ricordiamo che l'integrale è l'operazione inversa della derivazione (a meno di una costante additiva), per cui $\int D(F(x)g(x))\,dx=F(x)g(x)+C$ (vogliamo determinare quali funzioni hanno per derivata... la derivata di $F(x)g(x)$, e la risposta è: $F(x)g(x)$, e in generale tutte le funzioni che differiscono da $F(x)g(x)$ per una costante additiva):

$$\int f(x)g(x)\,dx=F(x)g(x)-\int F(x)g'(x)\,dx$$

Non abbiamo inserito la costante C di integrazione, in quanto è sottintesa nel secondo integrale.

L'integrazione per parti

L'integrazione per parti consiste nell'applicazione della formula $\int f(x)g(x)\,dx=F(x)g(x)-\int F(x)g'(x)\,dx$: l'integrale di un prodotto è uguale al prodotto tra una qualunque primitiva del primo

fattore moltiplicata per il secondo fattore inalterato, meno l'integrale del prodotto tra la stessa primitiva e la derivata del secondo fattore.

Il fattore $g(x)$ viene chiamato fattore finito, mentre $f(x)dx$ è il fattore differenziale.

Se l'integrale è definito, la regola di integrazione diventa:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=[F(x)g(x)]_a^b-\int_a^b F(x)g'(x)dx \ ,$$

dove $[F(x)g(x)]_a^b$ è un modo abbreviato di indicare $F(b)g(b)-F(a)g(a)$, ovvero il valore che assume la funzione $F(x)g(x)$ quando al posto di x sostituiamo b, meno quello che assume quando sostituiamo a.

Si noti che l'integrazione per parti risulta utile solo quando l'integrale a secondo membro, ovvero $\int F(x)g'(x)dx$, risulta più facile da calcolare rispetto a $\int f(x)g(x)dx$, dato che l'integrale del prodotto non viene calcolato, ma ricondotto ad un secondo integrale. Come per il metodo di sostituzione, non esiste una regola generale per capire quando utilizzare l'integrazione per parti. Solo la pratica, l'intuito, e talvolta uno o più tentativi non sempre fruttuosi possono, in generale, guidare chi cerca di calcolare un integrale. Tuttavia, esistono dei casi in cui si sa già che occorre l'integrazione per parti, e questi casi è utile conoscerli.

Esempio 1: calcola $\int_2^3 xe^x dx$.

Consideriamo come fattore finito (quello da derivare nell'integrale) x, e come fattore differenziale (quello di cui dobbiamo usare una primitiva) $e^x dx$. Poiché $\int e^x dx=e^x+C$, e^x è una primitiva di e^x, mentre 1 è la derivata di x. Quindi:

$$\int_2^3 x e^x dx=[x e^x]_2^3-\int_2^3 1\cdot e^x dx=$$

Si noti che, nel termine dopo l'uguale, il fattore finito x è inalterato, ed è stato moltiplicato per la primitiva e^x del fattore differenziale $e^x dx$, mentre all'interno dell'integrale che segue il segno meno il fattore finito x è stato derivato, e la sua derivata è stata moltiplicata

per la stessa primitiva del fattore differenziale $e^x dx$ usata nel termine precedente.

Ricordiamo che indichiamo con $[h(x)]_a^b$ la quantità $h(b)-h(a)$. Nel nostro caso, essendo $h(x)=x e^x$, $a=2$ e $b=3$, $h(b)=h(3)=3e^3$, mentre $h(a)=h(2)=2e^2$. Di conseguenza:

$$=3e^3-2e^2-\int_2^3 e^x dx=$$

Poiché $\int e^x dx=e^x+C$, ed essendo $\int_2^3 e^x dx$ un integrale definito,

$$=3e^3-2e^2-[e^x]_2^3=3e^3-2e^2-(e^3-e^2)=3e^3-2e^2-e^3+e^2=$$
$$=2e^3-e^2 \ .$$

Riepilogando, $\int_2^3 xe^x dx=2e^3-e^2$.

Esempio 2: calcola $\int (3x+1)e^{2x-3} dx$

Consideriamo come fattore finito (quello da derivare nell'integrale) $3x+1$, e come fattore differenziale (quello di cui dobbiamo usare una primitiva) $e^{2x-3}dx$.

Calcoliamo per prima cosa una primitiva di e^{2x-3} :

$$\int e^{2x-3}dx=$$

Per utilizzare la formula $\int f'(x)e^{f(x)}dx=e^{f(x)}+C$, generalizzazione di $\int e^x dx=e^x+C$, moltiplichiamo e dividiamo la funzione integranda per la derivata dell'esponente:

$$=\int \frac{1}{2}\cdot 2e^{2x-3}dx=$$

Portiamo fuori dall'integrale la costante moltiplicativa che non serve per applicare la formula $\int f'(x)e^{f(x)}dx=e^{f(x)}+C$:

$$=\frac{1}{2}\int 2e^{2x-3}dx=$$

Applichiamo la formula $\int f'(x)e^{f(x)}dx=e^{f(x)}+C$, dove $f(x)=2x-3$, e quindi $f'(x)=2$:

$$=\frac{1}{2}e^{2x-3}+C \ .$$

Riepilogando, $\int e^{2x-3}dx=\frac{1}{2}e^{2x-3}+C$

A noi interessa una primitiva di e^{2x-3}, $\int e^{2x-3}dx=\frac{1}{2}e^{2x-3}+C$ le fornisce tutte, al variare di C. Di norma, sceglieremo la nostra primitiva in modo che sia $C=0$. Quindi, nel nostro caso, posto $f(x)=e^{2x-3}$, sarà $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x-3}$. Iniziamo finalmente a calcolare $\int (3x+1)e^{2x-3}dx$:

$$\int (3x+1)e^{2x-3}dx=(3x+1)\frac{1}{2}e^{2x-3}-\int 3\frac{1}{2}e^{2x-3}dx=$$

Si noti che, nel termine dopo l'uguale, il fattore finito $3x+1$ è inalterato, ed è stato moltiplicato per la primitiva $\frac{1}{2}e^{2x-3}$ del fattore differenziale $e^{2x-3}dx$, mentre all'interno dell'integrale che segue il segno meno il fattore finito $3x+1$ è stato derivato, e la sua derivata è stata moltiplicata per la stessa primitiva del fattore differenziale $e^{2x-3}dx$ usata nel termine precedente.

Portiamo fuori dall'integrale la costante moltiplicativa e facciamo qualche calcolo:

$$=\frac{3x+1}{2}e^{2x-3}-\frac{3}{2}\int e^{2x-3}dx=$$

Abbiamo già visto che $\int e^{2x-3}dx=\frac{1}{2}e^{2x-3}+C$ (inutile rifare due volte lo stesso calcolo):

$$=\frac{3x+1}{2}e^{2x-3}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x-3}+C=\frac{3x+1}{2}e^{2x-3}-\frac{3}{4}e^{2x-3}+C=$$

Mettiamo in evidenza e^{2x-3} :

$$=\left(\frac{3x+1}{2}-\frac{3}{4}\right)e^{2x-3}+C=$$

Sommiamo le frazioni tra parentesi:

$$=\frac{2(3x+1)-3}{4}e^{2x-3}+C=\frac{6x+2-3}{4}e^{2x-3}+C=\frac{6x-1}{4}e^{2x-3}+C$$

Riepilogando,

$$\int (3x+1)e^{2x-3}dx=\frac{6x-1}{4}e^{2x-3}+C$$

Esempio 3: calcola $\int x^2e^x dx$

Consideriamo come fattore finito (quello da derivare nell'integrale) x^2 , e come fattore differenziale (quello di cui dobbiamo usare una primitiva) $e^x dx$.

Nota: in base a quale criterio abbiamo scelto quale dei due fattori derivare e quale integrare? Beh, il fattore x^2 presente dentro l'integrale ci "impiccia" un po', mentre sapremmo calcolare un integrale del tipo $\int e^x dx$ (o, in generale, del tipo $\int e^{ax+b} dx$). Ora, derivare o integrale un esponenziale con esponente di primo grado non cambia sostanzialmente la forma della funzione, mentre derivando x^2 l'esponente diminuisce, rendendo più semplice l'integrale a secondo membro. Al contrario, $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$; quindi, se scegliessimo $x^2 dx$ come fattore differenziale, otterremmo x^3 nell'integrale a secondo membro, e sarebbe ancora peggio del testo.

Calcoliamo quindi $\int x^2 e^x dx$:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx =$$

Si noti che il fattore e^x a secondo membro è una primitiva del fattore e^x a primo membro, mentre $2x$ è la derivata di x^2 .

Portiamo fuori dall'integrale la costante moltiplicativa:

$$= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx =$$

Abbiamo espresso l'integrale iniziale $\int x^2 e^x dx$ in funzione di $\int x e^x dx$. Si tratta di un integrale più semplice, ma non siamo ancora in grado di calcolarlo. Applichiamo quindi una seconda volta il metodo di integrazione per parti all'integrale $\int x e^x dx$. Utilizziamo x come fattore finito (quello da derivare), e $e^x dx$ come fattore differenziale (quello da integrare):

$$= x^2 e^x - 2 \left[x e^x - \int 1 \cdot e^x dx \right] =$$

Anche in questo caso, il fattore e^x a secondo membro è una primitiva del fattore e^x a primo membro, mentre 1 è la derivata di x .

Si noti che, quando sono necessarie più integrazioni per parti, non vanno mai scambiati i fattori finito e differenziale, o si tornerà al punto di partenza. Se si sceglie l'esponenziale cone fattore differenziale la prima volta, altrettanto si deve fare la seconda volta.

Proseguiamo i calcoli:

$$=x^2 e^x - 2x e^x + 2\int e^x\, dx =$$

Ricordiamo che $\int e^x\, dx = e^x + C$

$$=x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C =$$

Mettiamo in evidenza l'esponenziale:

$$=(x^2 - 2x + 2)e^x + C$$

Riepilogando,

$$\int x^2 e^x\, dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$$

Integrali del tipo $\int x^n e^{(ax+b)}\, dx$

Tutti gli integrali del tipo $\int x^n e^{(ax+b)}\, dx$, con n numero intero positivo e a e b costanti reali, possono essere risolti per parti. Se $n=1$ basta una integrazione per parti per risolvere; se $n=2$ ne servono due, se $n=3$ bisogna integrare tre volte per parti, e così via. Se il covid-19 dovesse persistere (Dio non voglia) per molto tempo, e non sapessimo cos'altro fare in casa, potremmo, con molta pazienza, calcolare anche $\int x^{1347} e^x\, dx$, eseguendo 1347 integrazioni per parti (ma non è un esercizio che ho assegnato, eh, è solo per dire).

Per oggi basta così.

Esercizi:

1) $\int_0^1 x e^x\, dx$

2) $\int x^3 e^x\, dx$

3) $\int (5x+4)e^{1-2x}\, dx$ **(suggerimento: calcola per prima cosa una primitiva di e^{1-2x}).**