INTEGRALI DELLE FUNZIONI RAZIONALI FRATTE
Terza parte

1b3) $\Delta < 0$, numeratore costante

Per calcolare un integrale del tipo $\int \frac{q}{ax^2+bx+c}dx$, con $\Delta = b^2-4ac<0$, dobbiamo ricondurlo alla forma $\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx$.

Il che può essere ottenuto utilizzando il metodo di sostituzione, oppure il completamento del quadrato. Qui userò il metodo del completamento del quadrato.

Esempio: calcola $\int \frac{1}{2x^2-2x+1}dx$.

Una volta appurato che $\Delta = b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot 2\cdot 1=4-8=-4<0$, il primo passo consiste nel trasformare il denominatore $2x^2-2x+1$ nella forma $(\alpha x\pm\beta)^2+\gamma$ (somma tra il quadrato di un binomio e un numero positivo). In questo caso ci conviene usare $(\alpha x-\beta)^2+\gamma$, visto che il coefficiente del termine di primo grado è $-2<0$.

Poiché $(\alpha x-\beta)^2+\gamma=\alpha^2x^2-2\alpha\beta x+\beta^2+\gamma$, il quadrato del primo termine deve essere $2x^2$, mentre il doppio prodotto deve essere (a parte il segno, già presente nella formula) $2x$. Siccome $2x^2=(\sqrt{2}x)^2$, il primo termine αx deve essere $\sqrt{2}x$. Inoltre, se dividiamo il doppio prodotto per 2 ($\frac{2x}{2}=x$) otteniamo il prodotto tra αx e β ; infine, dividendo il prodotto x per $\alpha x=\sqrt{2}x$ otteniamo $\beta=\frac{x}{\sqrt{2}x}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Quindi:

$$\int \frac{1}{2x^2-2x+1}dx=\int \frac{1}{(\sqrt{2}x)^2-2\cdot\sqrt{2}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+1}dx=$$

Per completare il quadrato sommiamo e sottraiamo $\beta^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$:

$$=\int \frac{1}{(\sqrt{2}x)^2-2\cdot\sqrt{2}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dx=$$

$$=\int \frac{1}{\left(\sqrt{2}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dx=\int \frac{1}{\left(\sqrt{2}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{1}{2}+1}dx=$$

$$=\int \frac{1}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}dx=$$

Ora che abbiamo ottenuto al denominatore la somma tra un quadrato e un numero positivo, notiamo che, rispetto alla formula da utilizzare ($\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx$) ci "impiccia" un po' il fatto che ci sia $\frac{1}{2}$, e non 1.

Mettiamo quindi in evidenza $\frac{1}{2}$:

$$=\int \frac{1}{\frac{1}{2}\left[2\left(\frac{2x-1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right]}dx=$$

Trasformiamo il 2 dopo l'apertura della parentesi quadra in un quadrato, al fine di inglobarlo nel quadrato:

$$=\int \frac{1}{\frac{1}{2}\left[(\sqrt{2})^2\left(\frac{2x-1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right]}dx=$$

Il prodotto tra due potenze con lo stesso esponente è una potenza con lo stesso esponente, avente per base il prodotto tra le basi:

$$=\int \frac{1}{\frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{2}\cdot\frac{2x-1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right]}dx=\int \frac{2}{(2x-1)^2+1}dx=$$

A questo punto dovremmo portare fuori dall'integrale la costante moltiplicativa 2, e moltiplicare e dividere per la derivata di $2x-1$. Tuttavia, siccome tale derivata è proprio 2, possiamo, in questo caso, saltare questi passaggi. Notiamo che, rispetto alla formula $\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx$, $f(x)=2x-1$, mentre $f'(x)=2$.

Poiché $\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx = arctg\, f(x)+C$ **, il risultato sarà**
$= arctg(2x-1)+C$.
Riepilogando,
$$\int \frac{1}{2x^2-2x+1}dx = arctg(2x-1)+C \quad .$$

Anche per stavolta basta così (avete un po' di carne al fuoco da metabolizzare).

Esercizi:

1) $\int \frac{3}{x^2-2x+5}dx$

2) $\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$