# INTEGRALI DELLE FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

**In questa lezione ci occuperemo degli integrali delle funzioni razionali fratte, ovvero degli integrali del rapporto tra due polinomi.**

## Concetti propedeutici

**Per poter affrontare questo argomento devi già, tra le altre cose:**
**1) saper effettuare la divisione tra due polinomi (proprio la divisione con resto: non sempre si può usare la regola di Ruffini);**
**2) saper risolvere un sistema di equazioni;**
**3) saper scomporre in fattori un polinomio;**
**4) conoscere e saper usare le formule relative agli integrali immediati** $\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$ **(con** $n\neq-1$ **),** $\int \frac{1}{x}\,dx=\ln|x|+C$ **e** $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx=arctg\,x+C$ **, nonché le loro generalizzazioni** $\int f'(x)\cdot[f(x)]^n\,dx=\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+C$ **(con** $n\neq-1$ **),** $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\ln|f(x)|+C$ **e** $\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\,dx=arctg\,f(x)+C$ **.**
**5) conoscere alcune proprietà basilari degli integrali:** $\int f(x)\pm g(x)\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx$ **,** $\int k\cdot f(x)\,dx=k\cdot\int f(x)\,dx$ **(con k costante).**

## 1) Numeratore di grado inferiore rispetto al denominatore

**Esaminiamo il caso** $\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx$ **, dove** $N(x)$ **e** $D(x)$ **sono due polinomi, e il grado di** $N(x)$ **e inferiore a quello di** $D(x)$ **.**

### 1a) Denominatore di primo grado

**Si tratta di un integrale del tipo** $\int \frac{p}{ax+b}\,dx$ **, dove p, a e b sono costanti. Per esempio,** $\int \frac{4}{3x+1}\,dx$ **. Per calcolare questo integrale useremo la formula** $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\ln|f(x)|+C$ **, per cui dovremo ottenere al numeratore la derivata del denominatore.**
**Esempio:**

$$\int \frac{4}{3x+1}\,dx=$$

Portiamo la costante 4 fuori dal simbolo di integrale (è una costante moltiplicativa):

$$=4\int\frac{1}{3x+1}dx=$$

Poiché la derivata del denominatore è 3, moltiplichiamo e dividiamo per 3 dentro l'integrale:

$$=4\int\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{3x+1}dx=$$

Portiamo fuori dall'integrale la costante moltiplicativa $\frac{1}{3}$ :

$$=\frac{4}{3}\int\frac{3}{3x+1}dx=$$

Il numeratore 3 è la derivata di $3x+1$ ( $f(x)=3x+1$ , $f'(x)=3$ ), per cui, usando la formula $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$ otteniamo

$$=\frac{4}{3}\ln|3x+1|+C \quad .$$

Riepilogando:

$$\int\frac{4}{3x+1}dx=\frac{4}{3}\ln|3x+1|+C \quad .$$

## 1b) Denominatore di secondo grado

Se il denominatore è di grado superiore al primo, la prima cosa da fare è scomporre in fattori (se possibile) il denominatore.

Come si scompone in fattori un polinomio di secondo grado?

Se manca il termine noto, mettendo in evidenza la x (es. $x^2-4x=x(x-4)$ ).

Se il denominatore è una differenza di quadrati, usando la formula $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ (per esempio, $4x^2-9=(2x+3)(2x-3)$ ).

Può essere usata la formula $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ , dove $x_1$ e $x_2$ sono le soluzioni dell'equazione $ax^2+bx+c=0$ (gli zeri del polinomio $ax^2+bx+c$ ). Si ricorda che, se l'equazione $ax^2+bx+c=0$ non ammette soluzioni reali ( $\Delta<0$ ), il polinomio $ax^2+bx+c$ non può essere scomposto nel campo reale.

### 1b1) $\Delta>0$

Calcoliamo $\int\frac{3x-1}{2x^2+x-1}dx$ .

**Risolviamo l'equazione $2x^2+x-1=0$ per scomporre in fattori il denominatore:**

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{-1\pm3}{4}\ .$$

**Quindi $x_1=\frac{-1-3}{4}=-1$ , mentre $x_2=\frac{-1+3}{4}=\frac{1}{2}$ . Utilizzando la formula $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ , si ottiene**

$$2x^2+x-1=2(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)=2(x+1)\frac{2x-1}{2}=(x+1)(2x-1)\ .$$

**Di conseguenza $\frac{3x-1}{2x^2+x-1}=\frac{3x-1}{(x+1)(2x-1)}$ . Per poter calcolare l'integrale $\int\frac{3x-1}{2x^2+x-1}dx=\int\frac{3x-1}{(x+1)(2x-1)}dx$ , trasformiamo preventivamente la quantità $\frac{3x-1}{(x+1)(2x-1)}$ nella forma $\frac{A}{x+1}+\frac{B}{2x-1}$ , dove A e B sono due costanti che ancora non conosciamo, e che vogliamo determinare. Imponiamo**

$$\frac{3x-1}{(x+1)(2x-1)}\equiv\frac{A}{x+1}+\frac{B}{2x-1}$$

**per determinare i valori di A e di B. Si noti che abbiamo usato il simbolo ≡ al posto di quello di uguaglianza (=) in quanto i due membri della relazione $\frac{3x-1}{(x+1)(2x-1)}\equiv\frac{A}{x+1}+\frac{B}{2x-1}$ devono essere identicamente uguali, ovvero devono essere uguali per qualunque valore di x (a parte, ovviamente, quelli che annullano i denominatori). Non si tratta di un'equazione, ma di un'identità.**

**Per risolverla, calcoliamo il minimo comune multiplo:**

$$\frac{3x-1}{(x+1)(2x-1)}\equiv\frac{A(2x-1)+B(x+1)}{(x+1)(2x-1)}$$

**Moltiplichiamo entrambi i membri per $(x+1)(2x-1)$ (supponendo che sia $(x+1)(2x-1)\neq0$ ):**

$$3x-1\equiv A(2x-1)+B(x+1)$$

**Effettuiamo i calcoli:**

$$3x-1\equiv2Ax-A+Bx+B$$

**Portiamo tutto a primo membro:**

$$3x-1-2Ax+A-Bx-B\equiv 0$$

**Mettiamo in evidenza la x:**

$$(3-2A-B)x-1+A-B\equiv 0$$

**Ricordiamo che due polinomi sono identici se e solo se hanno ordinatamente gli stessi coefficienti: poiché a secondo membro c'è 0, tutti i coefficienti a primo membro devono essere nulli. In particolare, $3-2A-B=0$ (il coefficiente di x deve essere nullo) e $-1+A-B=0$ (il termine noto deve essere nullo). Si faccia attenzione ad annullare i coefficienti del polinomio in x (se, in un altro esercizio, fosse $ax^2+bx+c\equiv 0$ , dovrebbe essere $a=0$ , $b=0$ e $c=0$ ).**

**Dovendo essere verificate contemporaneamente le equazioni $3-2A-B=0$ e $-1+A-B=0$ , risolviamo il sistema**

$$\begin{cases} 3-2A-B=0 \\ -1+A-B=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B=3-2A \\ -1+A-(3-2A)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B=3-2A \\ -1+A-3+2A=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B=3-2A \\ -4+3A=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B=3-2\cdot\dfrac{4}{3} \\ A=\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=\dfrac{4}{3} \\ B=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

**Avendo imposto $\dfrac{3x-1}{(x+1)(2x-1)} \equiv \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{2x-1}$, ed essendo $\begin{cases} A = \dfrac{4}{3} \\ B = \dfrac{1}{3} \end{cases}$, otteniamo che $\dfrac{3x-1}{(x+1)(2x-1)} \equiv \dfrac{\frac{4}{3}}{x+1} + \dfrac{\frac{1}{3}}{2x-1}$.**

**Attenzione: non ci siamo ancora occupati del calcolo dell'integrale $\int \dfrac{3x-1}{2x^2+x-1} dx$, ma abbiamo solo trasformato la funzione integranda. Tuttavia, possiamo dedurre che**

$$\int \frac{3x-1}{(x+1)(2x-1)} dx = \int \left( \frac{\frac{4}{3}}{x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{2x-1} \right) dx =$$

**(funzioni identiche hanno lo stesso integrale). Possiamo spezzare l'integrale, poiché $\int f(x)+g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ :**

$$= \int \frac{\frac{4}{3}}{x+1} dx + \int \frac{\frac{1}{3}}{2x-1} dx =$$

**E siamo ricondotti al caso 1a). Portiamo le costanti moltiplicative fuori dagli integrali:**

$$= \frac{4}{3} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{2x-1} dx =$$

**Dove necessario, moltiplichiamo e dividiamo per la derivata del denominatore:**

$$= \frac{4}{3} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2x-1} dx =$$

**Portiamo fuori dall'integrale la costante moltiplicativa:**

$$= \frac{4}{3} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{6} \int \frac{2}{2x-1} dx =$$

**In entrambi gli integrali, il numeratore è la derivata del denominatore. Utilizziamo la formula $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$ :**

$$= \frac{4}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{6} \ln|2x-1| + C \quad .$$

**Riepilogando,**

$$\int \frac{3x-1}{2x^2+x-1}\,dx=\frac{4}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\ln|2x-1|+C \quad .$$

**Per oggi basta così. Per esercizio, calcola i seguenti integrali:**

1) $\int \frac{5}{1-7x}\,dx$

2) $\int \frac{x-1}{4-x^2}\,dx$

3) $\int \frac{1-5x}{3x^2-7x+2}\,dx$

**Per richieste di chiarimenti, usa la funzione “manda un messaggio” nel registro elettronico. Risponderò appena possibile.**