EQUAZIONI GONIOMETRICHE ELEMENTARI

1) Definizione di equazione goniometrica elementare

Si chiamano equazioni goniometriche elementari quelle in cui una funzione goniometrica (senx, cosx, tgx o cotgx) viene uguagliata ad un numero, come nei seguenti casi:

$\text{sen}x = \frac{1}{2}$

$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{tg}x = 1$

$\text{cotg}x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Più in generale chiameremo equazioni goniometriche elementari tutte quelle che contengono una sola funzione goniometrica, rispetto alla quale siano di primo grado (in altre parole non devono contenere termini come $\text{sen}^2 x$, $\text{tg}^3 x$ o senxcosx; per esempio, $2\text{sen}x - \sqrt{3} = 0$). È importante che l'allievo comprenda ed impari bene quanto qui esposto, visto che tutte le altre equazioni goniometriche vengono trasformate, in un modo o nell'altro, in equazioni goniometriche elementari. Potremmo dire che le equazioni goniometriche elementari sono per le equazioni goniometriche quello che gli atomi rappresentano per le molecole: senza atomi è impossibile costruire molecole, anche se la sola conoscenza degli atomi non è sufficiente a comprendere tutte le proprietà delle molecole.

Poiché un'equazione goniometrica elementare ha, di norma, infinite soluzioni, divideremo la sua risoluzione in due parti (non necessariamente in quest'ordine):

1) trovare una soluzione particolare;
2) dalla prima soluzione dedurre tutte le altre.

Prerequisiti:

definizione e periodicità delle funzioni goniometriche; loro valori in corrispondenza di valori particolari (30°, 45° e 60°); relazione tra funzioni goniometriche di archi associati (in particolare supplementari e opposti); definizione delle funzioni goniometriche inverse; semplici concetti di geometria analitica (equazione delle rette parallele all'asse x o all'asse y, equazione della circonferenza goniometrica); capacità di utilizzare una calcolatrice scientifica; saper inserire correttamente gli angoli orientati nella circonferenza goniometrica (primo lato che coincide con il semiasse positivo delle x e, di conseguenza, vertice dell'angolo che coincide con l'origine); saper riconoscere graficamente quando due angoli sono supplementari o opposti.

Se questi concetti non sono chiari allo studente, è opportuno un loro ripasso preliminare.

2) Risoluzione di equazioni goniometriche elementari in senx

Esempio n°1: risolviamo l'equazione $\operatorname{sen}x = \frac{1}{2}$

Sappiamo che $\operatorname{sen}30° = \frac{1}{2}$, per cui, evidentemente, una soluzione della nostra equazione è proprio 30°. Questo conclude rapidamente la prima parte della nostra ricerca (trovare almeno una soluzione). Per trovare le altre, osserviamo innanzitutto che la funzione senx è periodica, con periodo 360°: questo vuol dire che se aggiungiamo a 30° un multiplo di un angolo giro (x=30°±360, x=30°±2·360°…) il seno di x vale sempre $\frac{1}{2}$. Sono dunque soluzioni i valori x=30°+k360°, dove k è un arbitrario numero intero (k=0, ±1, ±2…). Più in generale, una volta trovate tutte le soluzioni di un'equazione goniometrica in senx o in cosx comprese in un intervallo avente ampiezza 360° (per esempio, tali che 0°≤x<360°, oppure, sempre per esempio, tali che -90°≤x<270°), aggiungeremo ad esse k360°, scrivendo, se α è una tale soluzione, x= α+k360° o, se misuriamo α in radianti anziché in gradi, x= $\alpha+2k\pi$ (2π è la misura di un angolo di 360° in radianti).

Ma non abbiamo ancora finito, perché $\operatorname{sen}x = \frac{1}{2}$ non ammette solo la soluzione x=30°+k360°, come verificheremo aiutandoci con un grafico (figura 1). Ricordiamo che senx rappresenta l'ordinata del punto di intersezione tra il secondo lato dell'angolo e la circonferenza goniometrica. Risulta quindi naturale introdurre una variabile ausiliaria, ponendo Y=senx (notare che la Y è maiuscola; usiamo la lettera Y in quanto il seno è l'ordinata). L'equazione $\operatorname{sen}x = \frac{1}{2}$ diventa quindi $Y = \frac{1}{2}$. In altre parole, poiché senx è l'ordinata di un punto, se vogliamo che senx valga $\frac{1}{2}$ dobbiamo cercare innanzitutto quali punti del piano abbiano ordinata $\frac{1}{2}$ Poiché però tali punti devono stare sulla circonferenza goniometrica (essendo, per l'appunto, i punti di intersezione tra il secondo lato dell'angolo e la circonferenza goniometrica), metteremo a sistema $Y = \frac{1}{2}$ con l'equazione della circonferenza goniometrica, ovvero con $X^2 + Y^2 = 1$ (ricordiamo che una circonferenza con il centro nell'origine ha equazione $X^2 + Y^2 = r^2$, essendo r il raggio, che in questo caso vale 1). Si prega di fare attenzione alle maiuscole, in quanto x rappresenta un angolo, mentre X è l'ascissa di un punto P (in pratica, se P si trova sulla circonferenza goniometrica, il coseno di x).

Il sistema $\begin{cases} Y = \dfrac{1}{2} \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$ sarà risolto SOLO graficamente: in altre parole NON calcoleremo i valori di X e Y che ne rappresentano le soluzioni. Poiché sappiamo, dalla geometria analitica, che risolvendo un sistema troviamo le coordinate dei punti comuni, cercheremo appunto di individuarli graficamente.

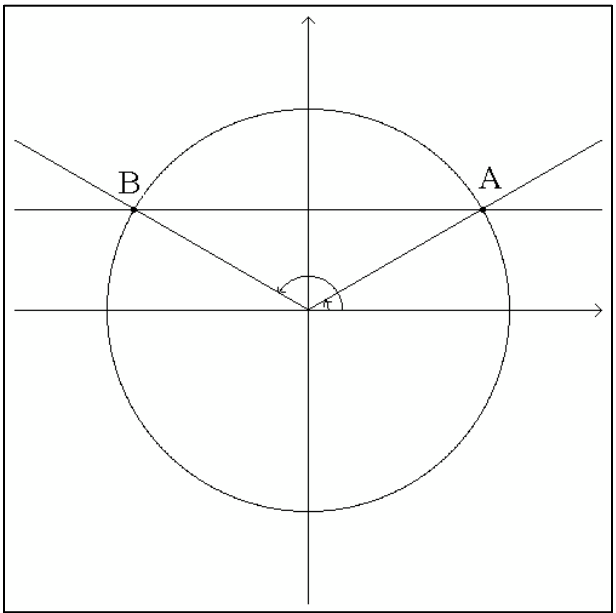

Figura 1

$Y = \frac{1}{2}$ rappresenta, come tutte le equazioni del tipo Y=costante, una retta parallela all'asse X (attenzione! NON all'asse Y!), mentre $X^2 + Y^2 = 1$ è, come già detto, l'equazione della circonferenza goniometrica. Stiamo quindi cercando i punti che la retta $Y = \frac{1}{2}$ ha in comune con la circonferenza goniometrica.

Nel grafico della figura n°1 notiamo due punti comuni, detti A e B: sono le intersezioni tra i secondi lati degli angoli, soluzioni di $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$, e la circonferenza goniometrica. Se congiungiamo A e B con l'origine otteniamo i secondi lati delle soluzioni. Tenendo presente che il primo lato deve coincidere con il semiasse positivo delle X, sempre dalla figura 1 intuiamo che questi due angoli risultano tra loro supplementari (e, d'altra parte, dovremmo ricordare che angoli supplementari hanno lo stesso seno). Quindi, se è soluzione 30°, lo è anche il suo supplementare 180°-30°=150°. Come nel caso precedente, scriveremo x=150°+k360°, essendo k un arbitrario numero intero.

Riepilogando, le soluzioni dell'equazione $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ sono rappresentate dalla scrittura:

x=30°+k360° o x=150°+k360°[1]

In altre parole, **tutte le volte che dobbiamo risolvere un'equazione goniometrica elementare in senx di cui conosciamo una soluzione α, la soluzione sarà:**

x= α+k360° o x=180°- α+k360°

[1] La parola "o" qui non vuol dire che siamo incerti se la soluzione sia rappresentata da x=30°+k360° o da x=150°+k360°, ma che x può essere uguale a 30°+k360° OPPURE anche a 150°+k360°; le due uguaglianze non potrebbero ovviamente essere vere contemporaneamente

Se misuriamo gli angoli in radianti anziché in gradi, scriveremo invece $\mathbf{x=\alpha+2k\pi}$ o $\mathbf{x=\pi-\alpha+2k\pi}$.

In particolare, nell'esempio appena studiato, la soluzione in radianti è data dalla formula $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ o $x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi$.

Esempio n°2: risolviamo l'equazione $\mathrm{sen}x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Procedendo come nel caso precedente, ci rendiamo subito conto che 45° è soluzione, in quanto $\mathrm{sen}45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ponendo Y=senx e mettendo a sistema con l'equazione della circonferenza goniometrica otteniamo:

$$\begin{cases} Y=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ X^2+Y^2=1 \end{cases}.$$

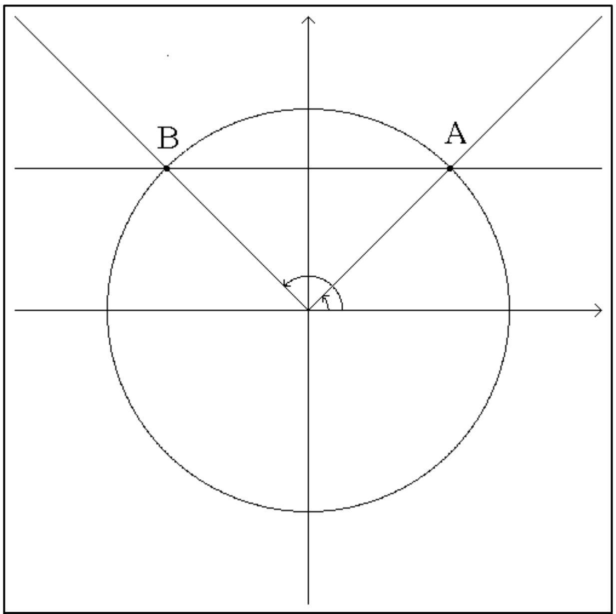

Figura 2

Anche stavolta la prima equazione rappresenta una retta parallela all'asse X, che interseca la circonferenza goniometrica in due punti distinti. Congiungendo tali punti con l'origine otteniamo due angoli che, come si vede dal grafico della figura n°2, risultano supplementari. Una seconda soluzione sarà quindi x=180°-45°=135°. Ad entrambe le soluzioni aggiungeremo k360° per tener conto della periodicità di senx. La soluzione finale è:

x=45°+k360° o x=145°+k360°.

Se vogliamo misurare x in radianti, la soluzione si scrive così:

$x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ o $x=\frac{3}{4}\pi+2k\pi$

$\left(\frac{3}{4}\pi\right.$ è il supplementare di $\frac{\pi}{4}$, ovvero $\left.\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{4\pi-\pi}{4}\right)$.

Esempio n°3: $\mathrm{sen}x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ormai dovremmo aver capito come trovare tutte le soluzioni se ne conosciamo una; tuttavia stavolta probabilmente non ne conosciamo nessuna a memoria: infatti, pur sapendo che $\mathrm{sen}60°=+\frac{\sqrt{3}}{2}$, difficilmente (almeno all'inizio) ricordiamo a quale angolo corrisponda un valore negativo del seno. Non importa. Procediamo ugualmente ponendo Y=senx e mettendo a sistema l'equazione della circonferenza goniometrica, ottenendo $\begin{cases} Y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$, e osserviamo il grafico relativo (figura n°3).

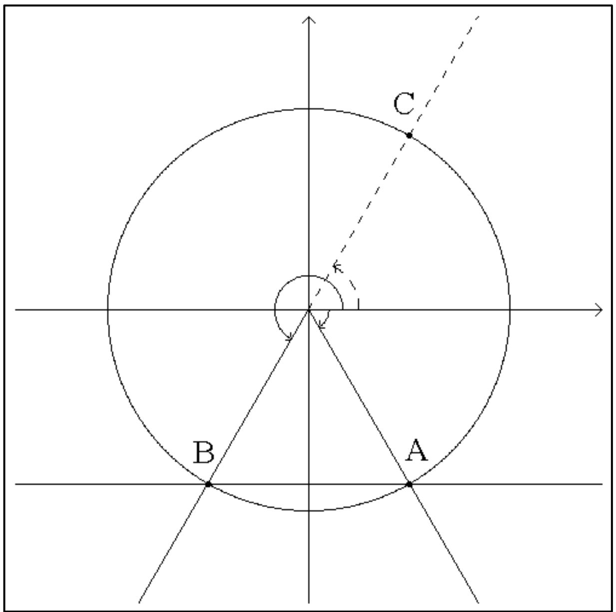

Figura 3

L'unica differenza, rispetto ai primi due esempi, è che la retta parallela all'asse X è contenuta nel terzo e nel quarto quadrante, anziché nel primo e nel secondo. Inoltre, se tratteggiamo anche il secondo lato dell'angolo di 60°[1], (il cui seno vale $\frac{\sqrt{3}}{2} = \left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$), ci accorgiamo, sempre dalla figura 3, che la soluzione che appartiene al quarto quadrante e 60° sono opposti (d'altra parte, dovremmo ricordare che angoli opposti hanno seno opposto). Quindi $\mathrm{sen}(-60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, e la nostra soluzione particolare è proprio x=-60°. Ricaviamo poi una seconda soluzione data dal supplementare di -60° (ATTENZIONE! Il supplementare di -60° è 180-(-60°)=180+60=240°, e non 180-60°!). Aggiungendo come al solito k360° otteniamo:

x=-60°+k360° o x=240°+k360°;

oppure, in radianti, $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ o $x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$.

Esempio n°4: $\mathrm{sen}x = -\frac{4}{5}$.

Stavolta non conosciamo nessun angolo il cui seno risulti $-\frac{4}{5}$ o $\frac{4}{5}$. Ha poca rilevanza il fatto che $-\frac{4}{5}$ sia negativo, in quanto una prima soluzione andrà calcolata necessariamente con l'ausilio di una calcolatrice scientifica.[2] Per evitare

---

[1]Non utilizziamo una linea continua perché 60° non è soluzione dell'equazione $\mathrm{sen}x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

[2] La riduzione al primo quadrante ha senso per imparare a memoria il seno di 3 angoli (30°, 45° e 60°) anziché di 12 $\left(\text{sapendo che } \mathrm{sen}30° = \frac{1}{2} \text{ deduciamo che } \mathrm{sen}150° = \frac{1}{2} \text{ o che } \mathrm{sen}(-30°) = -\frac{1}{2}\right)$,

complicazioni inutili, cercheremo quindi direttamente un angolo α il cui seno sia $-\frac{4}{5}$.

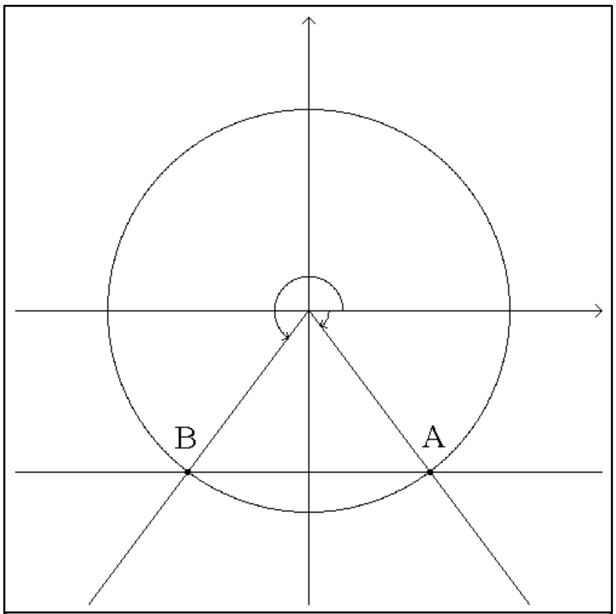

Figura 4

Ricordiamo che l'espressione $\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)$ $\left(\text{si legge arcoseno di } -\frac{4}{5}\right)$ indica l'angolo compreso tra -90° e 90° $\left(\text{in radianti, tra } -\frac{\pi}{2} \text{ e } \frac{\pi}{2}\right)$, estremi compresi, il cui seno vale $-\frac{4}{5}$. Di conseguenza il seno dell'angolo $\alpha = \arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)$ è proprio $-\frac{4}{5}$, e $\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)$ è soluzione dell'equazione proposta. Attenti, perché questa è solo una prima soluzione; se procediamo come al solito per trovare le altre, ponendo Y=senx, otteniamo:

$$\begin{cases} Y = -\frac{4}{5} \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases},$$

e dall'interpretazione grafica (figura n°4) deduciamo l'esistenza di due soluzioni supplementari tra loro, a cui aggiungere, come di consueto, k360°.

La soluzione è quindi:

$$x = \arcsin\left(-\frac{4}{5}\right) + k360° \text{ o } x = 180° - \arcsin\left(-\frac{4}{5}\right) + k360°.$$

Utilizzando una calcolatrice scientifica, possiamo determinare il valore approssimato di $\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)$, ovvero -53°7'48,37''. Tenendo conto del fatto che 180-53°7'48,37''=126°52'11,63'' possiamo scrivere dunque:

$$x = -53°7'48{,}37'' + k360° \text{ o } x = 126°52'11{,}63'' + k360°.$$

Esaminiamo ora alcuni casi particolari; cominciamo risolvendo senx=0 (esempio n°5)

Procedendo come al solito otteniamo

---

non per una calcolatrice che è comunque in grado di fornire tutte le soluzioni che ci servono in una impercettibile frazione di secondo, senza correre il rischio di… dimenticarne qualcuna!

$$\begin{cases} Y = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}.$$

Poiché la prima equazione rappresenta l'asse X, i due punti di intersezione con la circonferenza goniometrica (figura n°5) forniscono le soluzioni 0° e 180° (180° è il supplementare di 0°). Potremmo aggiungere ad esse la solita espressione k360°, ma in questo caso specifico (solo quando il seno vale 0) i valori che si ottengono hanno periodicità inferiore (180°), e possono essere indicati da una sola formula: x=k180°[1]. Se invece vogliamo indicare le soluzioni in radianti, scriveremo $x = k\pi$.

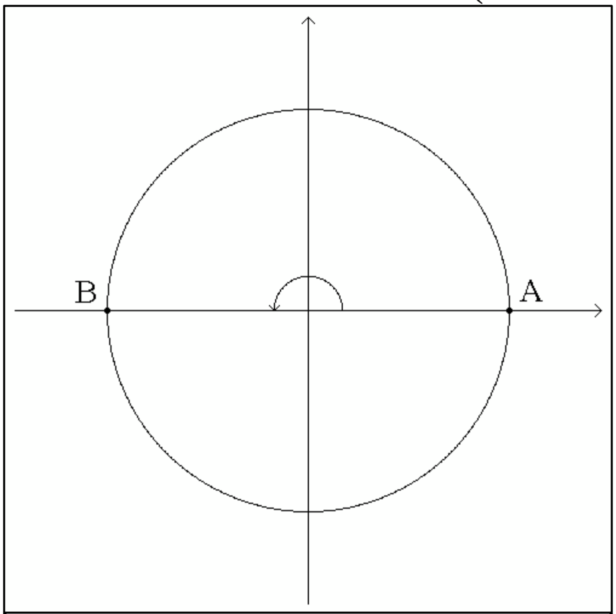

Figura 5

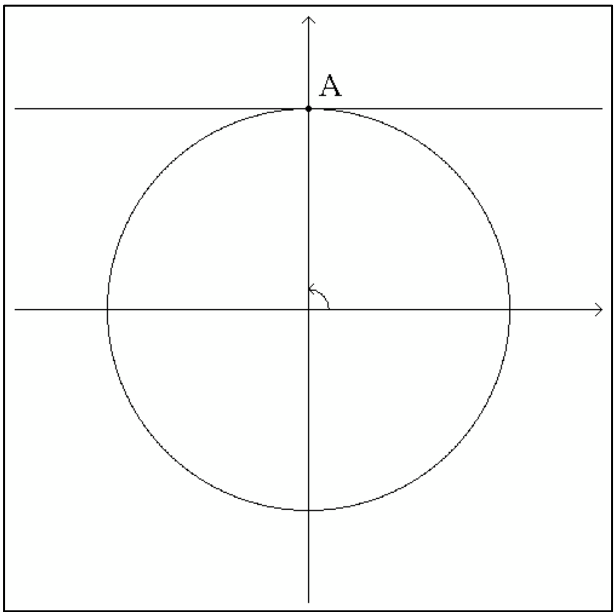

Figura 6

Esempio n°6: risolviamo senx=1.

In questo caso la retta Y=1 è tangente alla circonferenza goniometrica (figura n°6), per cui otteniamo un solo punto di intersezione (o meglio due coincidenti), per cui la soluzione è data da un solo gruppo di angoli: x=90°+k360° $\left(\text{in radianti, } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$.

Esempio n°7: $\operatorname{sen} x = \sqrt{3}$.

Poiché $\sqrt{3}$ è maggiore di 1, la retta $Y = \sqrt{3}$ (figura 7) è esterna alla circonferenza goniometrica (che, per definizione, ha centro nell'origine e raggio 1). Quindi non esistono soluzioni, e l'equazione risulta impossibile. D'altra parte, poiché senx è

[1] Si noti che, se k è pari, la scrittura x=k180° fornisce i valori 0°, 360°, -360°… come x=k360°, mentre, se k è dispari, si ottengono 180°, -180, 450, -450… come quando scriviamo x=180°+k360°. La scrittura x=k180° indica quindi gli stessi valori di x=k360° o x=180°+k360°, ma viene preferita per la sua brevità.

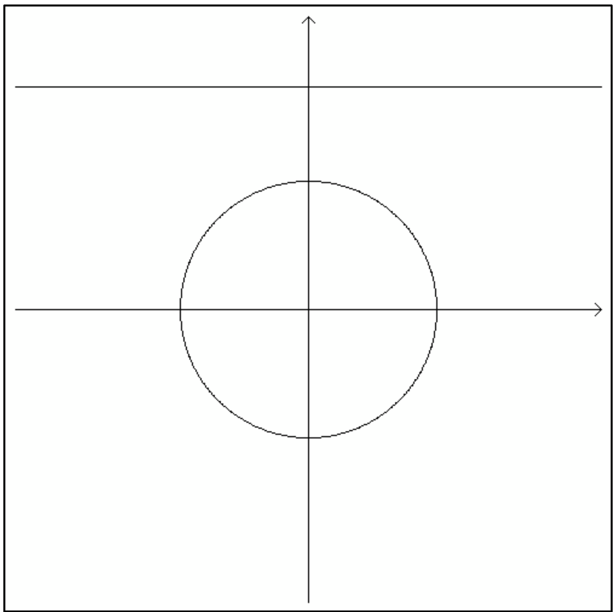

Figura 7

compreso tra -1 e 1, è evidentemente impossibile che assuma valori maggiori di 1 o minori di -1.

Esercizi:

1) $\operatorname{sen}x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left[x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ o } x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right]$

2) $\operatorname{sen}x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left[x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ o } x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\right]$

3) $\operatorname{sen}x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\left[x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ o } x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right]$

4) $\operatorname{sen}x = -1$ $\left[x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

5) $\operatorname{sen}x = \frac{4}{5}$ $[x = 53°7'48{,}37'' + k360° \text{ o } x = 126°52'11{,}63'' + k360°]$

6) $\operatorname{sen}x = -\frac{5}{12}$ $[x = -24°37'27{,}55'' + k360° \text{ o } x = 204°37'27{,}55'' + k360°]$

7) $\operatorname{sen}x = -\sqrt{2}$ [nessuna soluzione]

3) Risoluzione di equazioni goniometriche elementari in cosx

Il metodo che useremo è molto simile a quello utilizzato per le equazioni in senx, tenendo però presente che il coseno è l'ascissa (e non l'ordinata) del punto di intersezione tra la circonferenza goniometrica e il secondo lato dell'angolo, e che di conseguenza angoli opposti hanno lo stesso coseno, mentre quelli supplementari hanno coseno opposto (al contrario del seno).

Esempio n°1: risolviamo l'equazione $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Essendo il coseno l'ascissa, come già detto, dovremo porre X=cosx (e non Y, come nelle equazioni in seno). Occorre distinguere bene la x minuscola, che rappresenta l'angolo, dalla X maiuscola, che indica il coseno di x. L'equazione goniometrica diventa quindi $X = \frac{\sqrt{2}}{2}$, a cui metteremo a sistema la circonferenza goniometrica. Otteniamo:

$$\begin{cases} X = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}.$$

$X = \frac{\sqrt{2}}{2}$ rappresenta una retta parallela all'asse Y (figura n°8), che interseca la circonferenza goniometrica in due punti distinti (anche in questo caso risolveremo il sistema solo graficamente, ovvero cercheremo di identificare nel disegno i punti comuni).

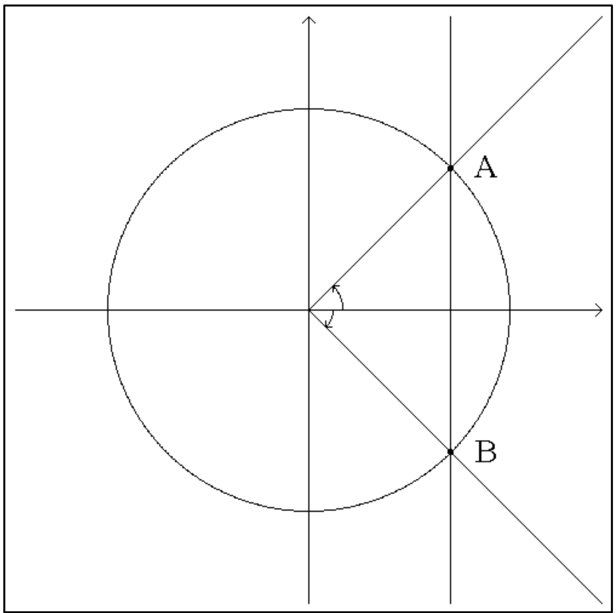

Figura 8

Congiungendo tali punti con l'origine si ottengono angoli opposti (e, d'altra parte, sappiamo che angoli opposti hanno coseno uguale). Poiché sappiamo a memoria che $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, e quindi $\frac{\pi}{4}$ è una prima soluzione, basta considerare anche l'opposto $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ e aggiungere ad entrambi un multiplo arbitrario di un angolo giro (2kπ). La soluzione sarà quindi $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ (o, se vogliamo misurare gli angoli in gradi, $x = \pm 45° + k360°$).

Più in generale, **tutte le volte che dobbiamo risolvere un'equazione goniometrica elementare in cosx di cui conosciamo una soluzione α, la soluzione sarà:**

x= ±α+k360

(se misuriamo gli angoli in radianti anziché in gradi, $x = \pm\alpha + 2k\pi$).

Esempio n°2: $\cos x = -\frac{1}{2}$.

L'equazione si trasforma,come nell'esercizio precedente, nel sistema

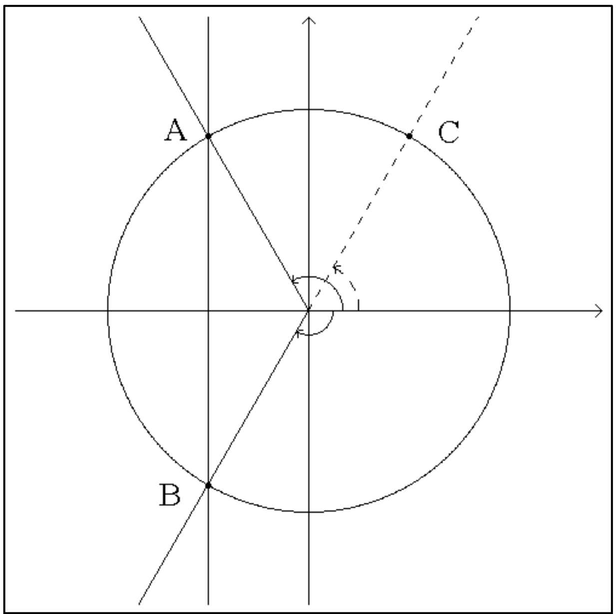

Figura 9

$$\begin{cases} X = -\frac{1}{2} \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases},$$

dove la retta di equazione $X = -\frac{1}{2}$, parallela all'asse Y, interseca la circonferenza goniometrica in due punti distinti, che, congiunti con l'origine, forniscono i secondi lati di due angoli opposti, soluzione di $\cos x = -\frac{1}{2}$ (figura n°9). Il problema è che, probabilmente, non ricordiamo a memoria angoli che abbiano il coseno negativo, mentre sappiamo che $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = \left|-\frac{1}{2}\right|$. Se tratteggiamo (non è una soluzione, per questo non usiamo una linea continua) il secondo lato dell'angolo $\frac{\pi}{3}$, ci accorgiamo che la soluzione dell'equazione $\cos x = -\frac{1}{2}$ che appartiene al secondo quadrante è l'angolo supplementare di $\frac{\pi}{3}$, cioè $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$ (e, d'altra parte, sappiamo che angoli supplementari hanno coseno opposto). Tenendo presente che sono soluzioni anche l'angolo opposto $\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$ e quelli che si ottengono aggiungendo un multiplo arbitrario di un angolo giro ($2k\pi$), la soluzione sarà:

$x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ (o, in gradi, x=±120°+k360°).

Esempio n°3: $\cos x = \frac{1}{3}$.

Ponendo X=cosx l'equazione si trasforma nel sistema $\begin{cases} X = \frac{1}{3} \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$, che fornisce due punti di intersezione tra la retta parallela all'asse Y di equazione $X = \frac{1}{3}$ e la circonferenza goniometrica (figura n°10). Congiungendo tali punti con l'origine si ottengono due angoli opposti. Rimane quindi solo il problema di trovare una prima soluzione α, visto che le soluzioni, come di consueto, assumeranno la forma x=±α+k360°, dove α è una qualunque soluzione dell'equazione. Ricordiamo che l'espressione $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ $\left(\text{si legge arcocoseno di } \frac{1}{3}\right)$ indica l'angolo, compreso tra 0° e 180° (estremi inclusi), il cui coseno è $\frac{1}{3}$. Quindi il coseno di tale angolo è, ovviamente, $\frac{1}{3}$, per cui $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ è soluzione dell'equazione $\cos x = \frac{1}{3}$. Le soluzioni assumono quindi la forma:

$$x = \pm\arccos\left(\frac{1}{3}\right) + k360°.$$

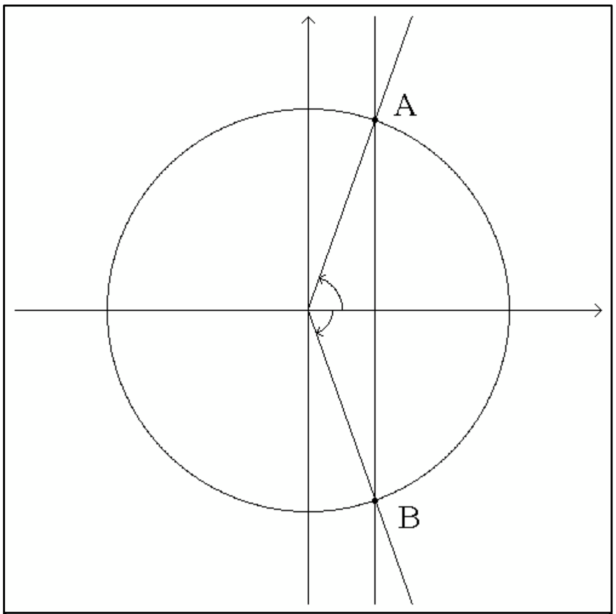

Figura 10

Per trovare il valore approssimato delle soluzioni dobbiamo utilizzare una calcolatrice scientifica: poiché $\arccos\left(\frac{1}{3}\right) \cong 70°31'43{,}61''$, otteniamo che

$$x = \pm 70°31'43{,}61'' + k360°.$$

Esempio n°4 (caso particolare): cosx=0

L'equazione si trasforma nel sistema:

$\begin{cases} X = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$, le cui soluzioni sono le intersezioni tra l'asse Y e la circonferenza goniometrica (figura n°11). Anche se non sarebbe sbagliato scrivere le soluzioni nella forma consueta $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, solo in questo caso (quando cosx=0), dato che la periodicità delle soluzioni risulta dimezzata, viene preferita l'espressione

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$ [1]

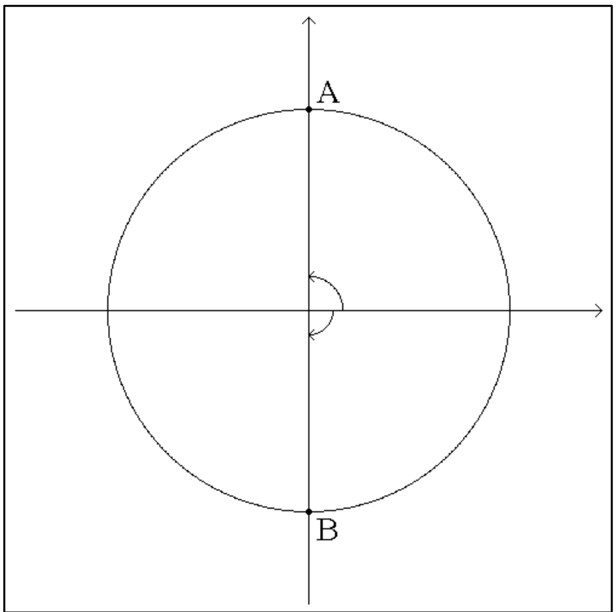

Figura 11

[1] Si noti che $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, per k pari (ovvero k=2h, con h intero), diventa $x = \frac{\pi}{2} + 2h\pi$, mentre per k dispari (k=2h-1, sempre con h intero), si trasforma in

Esempio n°5: cosx=-1.

Il sistema $\begin{cases} X = -1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$ fornisce un solo punto di intersezione (figura n°12), visto che la retta di equazione $X = -1$ è tangente alla circonferenza goniometrica. Visto che cos180°=-1, la soluzione è x=180°+k360° (in radianti, $x = \pi + 2k\pi$).

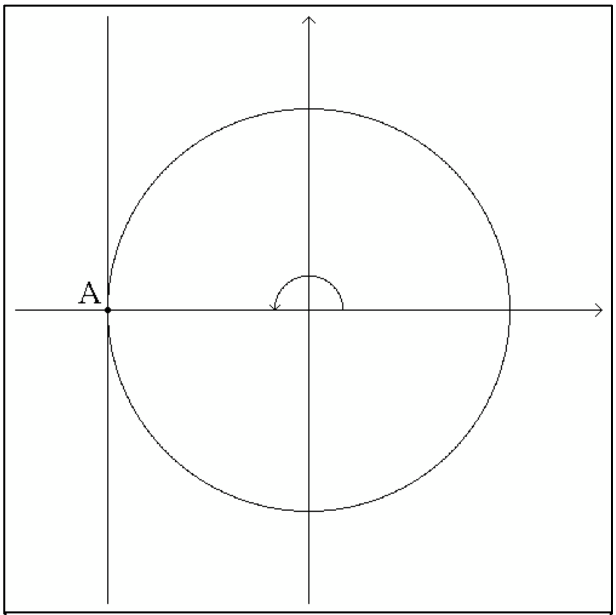

Figura 12

Esempio n°6: cosx=-3.

Otteniamo il sistema $\begin{cases} X = -3 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$.

Dato che la retta di equazione $X = -3$ non interseca la circonferenza goniometrica (figura n°13), l'equazione cosx=-3 risulta impossibile (anche perché il coseno è sempre compreso tra -1 e 1; quindi non può assumere valori inferiori a -1).

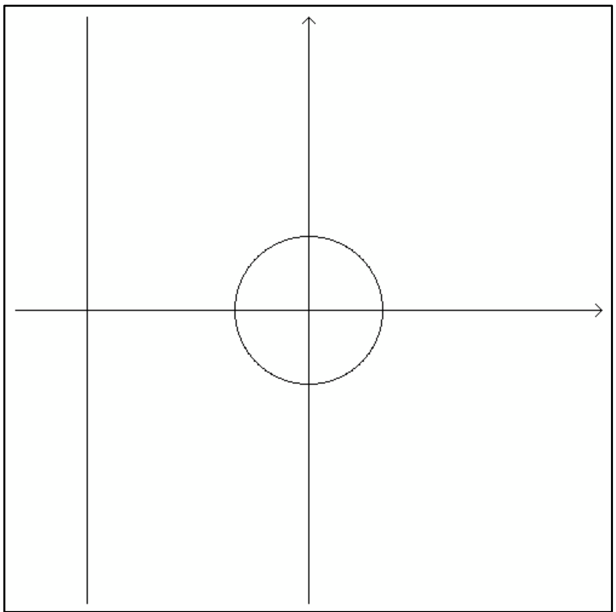

Figura 13

Esercizi:

1) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$

2) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\left[x = \pm\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right]$

3) $\cos x = \frac{1}{2}$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$

4) $\cos x = 1$ $\left[x = 2k\pi\right]$

$x = \frac{\pi}{2} + 2(h-1)\pi = \frac{\pi}{2} + 2h\pi - \pi = \frac{\pi - 2\pi}{2} + 2h\pi = -\frac{\pi}{2} + 2h\pi$. L'espressione $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ è quindi perfettamente equivalente a $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2h\pi$.

5) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $[x = \pm 54°44'8{,}20''+k360°]$

6) $\cos x = -\frac{12}{13}$ $[x = \pm 157°22'48{,}49''+k360°]$

7) $\cos x = \sqrt{3}$ [nessuna soluzione]

4) Risoluzione di equazioni goniometriche elementari in tgx

A differenza delle equazioni in senx e in cosx, per quelle in tgx e in cotgx non utilizzeremo variabili ausiliare, anche se continueremo a sfruttare la definizione delle funzioni goniometriche.

Esempio n°1: $\mathrm{tg}x = \sqrt{3}$.

Ricordiamo che la tangente di un angolo è l'ordinata del punto di intersezione tra il secondo lato dell'angolo (o il suo prolungamento) e la retta tangente alla circonferenza goniometrica nel punto (1;0). Quindi dovremo cercare, su tale tangente (ovvero sulla retta di equazione X=1), un punto A di ordinata $\sqrt{3}$. Congiungendo A con l'origine, otteniamo il secondo lato di un angolo soluzione dell'equazione. Sapendo che $\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, e osservando la figura ***, deduciamo che tale angolo è proprio $\frac{\pi}{3}$. Ma la semiretta OA potrebbe anche essere, anziché il secondo lato di un angolo soluzione di $\mathrm{tg}x = \sqrt{3}$, il suo prolungamento. Ora, prolungando tale semiretta notiamo un ulteriore punto B di intersezione tra la retta OA e la circonferenza goniometrica. Poiché A, O e B sono situati sulla stessa retta, l'angolo AOB vale π, e quindi una seconda soluzione, come è evidente dalla figura, è $\frac{\pi}{3}+\pi$. Inoltre ad entrambi i valori $\left(\frac{\pi}{3} \text{ e } \frac{\pi}{3}+\pi\right)$ potremmo aggiungere un multiplo di un angolo giro senza che cambi la posizione dei punti A e B. La periodicità delle soluzioni di un'equazione elementare in tgx è quindi π, e non 2π come per quelle in senx o in cosx. Basta quindi scrivere una sola soluzione (per esempio, quella corrispondente al punto A), aggiungendole un multiplo arbitrario di un angolo piatto. La soluzione completa è:

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$