PROF. MOTTA MARCO

LA DISPENSA DEL PROBLEMA DI TRIGONOMETRIA

Trova l'intruso

Proprietà che possono essere utilizzate quando si risolve un problema di trigonometria (usa quello che serve; se mancasse qualcosa… vallo a "comprare" sul libro di matematica)

Angoli che insistono su un arco

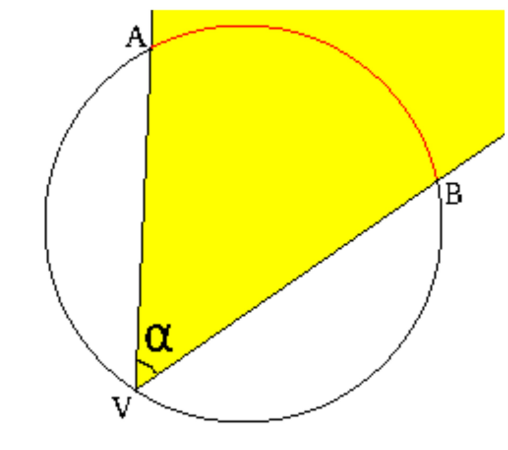

Figura 1: α insiste sull'arco AB

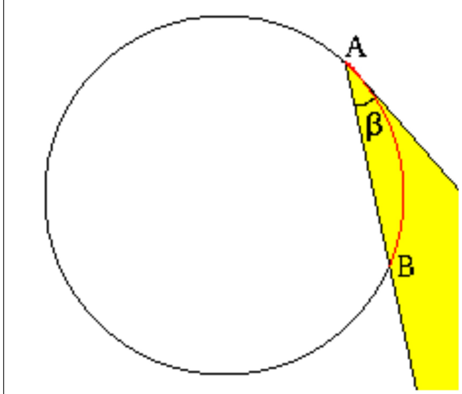

Figura 2: anche β insiste sull'arco AB

Un angolo alla circonferenza (ovvero, che ha il vertice sulla circonferenza) insiste sull'arco AB se l'intersezione tra l'angolo (parte di piano compresa tra due semirette con la stessa origine) e la circonferenza è l'arco AB. Analoga

definizione vale per gli angoli al centro (che hanno il vertice al centro della circonferenza). Un angolo che insiste su un arco AB può essere:

1) l'angolo opposto ad AB nel triangolo ABV inscritto nella circonferenza (figura 1);

2) l'angolo tra AB e la tangente alla circonferenza (figura 2).

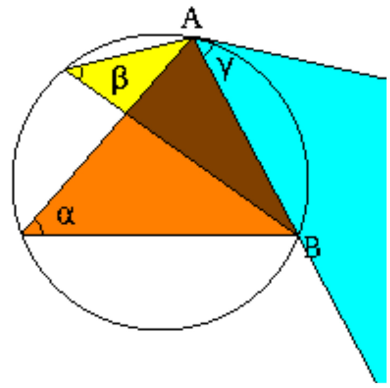

Figura 3: α=β=γ

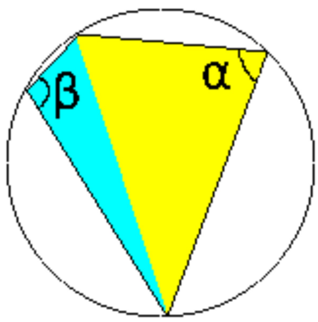

Figura 4: α=π-β

Angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono congruenti (figura 3: α=β=γ).

Angoli alla circonferenza che insistono su archi opposti sono supplementari (figura 4: α=π-β). Si noti che gli angoli alla circonferenza che insistono su archi opposti formano un quadrilatero inscritto nella circonferenza[1].

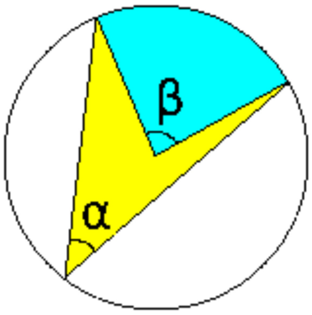

Figura 5: β=2α

Un angolo al centro è il doppio di un angolo alla circonferenza se i due angoli insistono sullo stesso arco (figura 5: β=2α).

Un triangolo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo (figura 6: un lato del triangolo deve coincidere

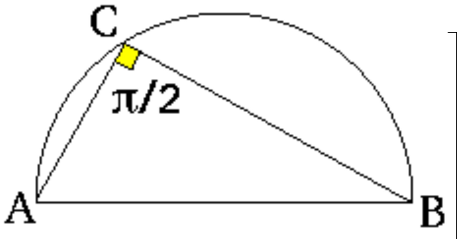

Figura 6: l'angolo in C è retto

1 A meno che uno dei due angoli sia delimitato dalla tangente alla circonferenza.

con il diametro, mentre il vertice opposto deve appartenere alla semicirconferenza).

Una retta tangente ad una circonferenza è perpendicolare al raggio che ha un estremo nel punto di tangenza (figura 7).

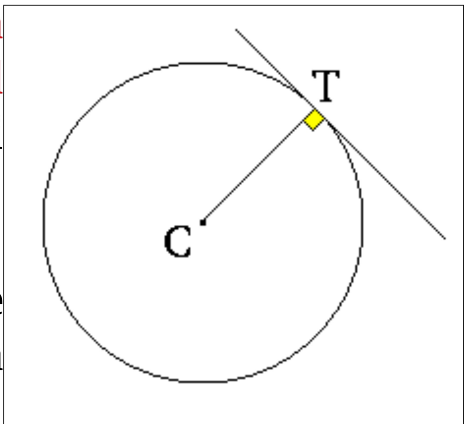

Figura 7: la tangente è perpendicolare al raggio

Formule goniometriche

Per calcolare una funzione goniometrica in funzione di un'altra (quando non si conosce l'angolo):

$sen\,\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ **(per angoli interni di un triangolo usa sempre il +);**

$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-sen^2\alpha}$ **(per angoli interni di un triangolo usa il + se l'angolo è acuto, il – se l'angolo è ottuso. Non utilizzare questa formula se non è noto il quadrante di α);**

$\cos\alpha = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}$ **(per angoli interni di un triangolo usa il + se la tangente è positiva, il - se è negativa).**

$tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}$

$tg\,\alpha = \dfrac{1}{ctg\,\alpha}$

Angoli associati

Angoli supplementari hanno stesso seno e coseno opposto (due angoli si dicono supplementari se la loro somma è un angolo piatto):

$sen(\pi-\alpha) = sen\,\alpha$ **;**

$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$ **.**

Angoli complementari si scambiano seno e coseno, tangente e cotangente (due angoli si dicono complementari se la loro somma è un angolo retto)

$sen\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$ **;**

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=sen\,\alpha$;

$ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=tg\,\alpha$;

$tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=ctg\,\alpha$.

Formule di addizione, sottrazione, duplicazione e bisezione

$sen(\alpha\pm\beta)=sen\,\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\,sen\,\beta$ **(usa il segno superiore per $\alpha+\beta$, quello inferiore per $\alpha-\beta$);**

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp sen\,\alpha\,sen\,\beta$ **(usa il segno superiore per $\alpha+\beta$, quello inferiore per $\alpha-\beta$);**

$sen(2\alpha)=2\,sen\,\alpha\cos\alpha$ **(formula di duplicazione);**

$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-sen^2\alpha$ **(formula di duplicazione);**

$sen\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ **(formula di bisezione; se α è un angolo interno di un triangolo, usa il +);**

$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ **(formula di bisezione; se α è un angolo interno di un triangolo, usa il +, in quanto la sua metà è sicuramente acuta).**

Somma degli angoli interni di un triangolo

La somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto (figura 8: α+β+γ=π).

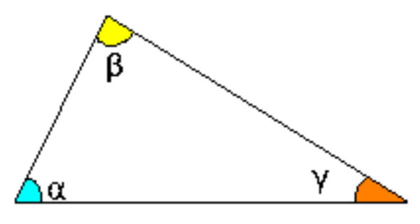

Figura 8

Se si conoscono α e β,

$\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$.

Se si conoscono seno e coseno di α e β,

$sen\,\gamma=sen[\pi-(\alpha+\beta)]=sen(\alpha+\beta)=...$ **(usa la formula di addizione del seno);**

$\cos\gamma=\cos[\pi-(\alpha+\beta)]=-\cos(\alpha+\beta)=...$ **(usa la formula di addizione del coseno).**

Angoli interni nei triangoli isosceli

Supponiamo di conoscere seno e coseno di un angolo interno, ma non l'angolo. In un triangolo isocele di base a (vedi figura 9) $\alpha=\pi-(\beta+\gamma)=\pi-2\beta$. Quindi possiamo ricavare seno e coseno dell'angolo al vertice usando gli angoli supplementari e le formule di duplicazione:

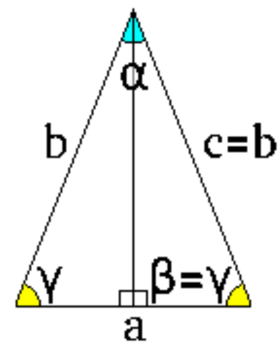

Figura 9: triangolo isoscele

$sen\,\alpha=sen(\pi-2\beta)=sen(2\beta)=...$ **(usa la formula di duplicazione);**

$\cos\alpha=\cos(\pi-2\beta)=-\cos(2\beta)=...$ **(usa la formula di duplicazione).**

Inoltre $2\beta=\pi-\alpha$, e quindi $\beta=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$. Possiamo quindi ricavare seno e coseno dell'angolo alla base utilizzando gli angoli complementari e le formule di bisezione:

$sen\,\beta=sen\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\frac{\alpha}{2}=...$ **(usa la formula di bisezione; nota che, essendo $\frac{\alpha}{2}$ acuto, dobbiamo scegliere il segno +);**

$\cos\beta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=sen\frac{\alpha}{2}=...$ **(usa la formula di bisezione).**

Teoremi di trigonometria

Primo teorema sui triangoli rettangoli

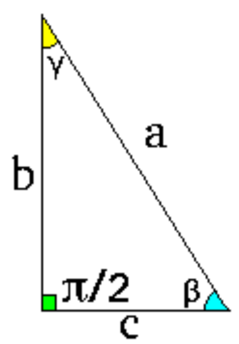

Figura 10: i lati che misurano a, b e c sono opposti agli angoli α=π/2, β e γ

$b=a\cdot sen\,\beta=a\cdot\cos\gamma$ **(vedi fig. 10): in un triangolo rettangolo un cateto è uguale all'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto al cateto (oppure per il coseno dell'angolo compreso tra cateto e ipotenusa). Può esser usato per calcolare il cateto, oppure l'ipotenusa, oppure il seno o il coseno di un angolo acuto, a condizione che siano noti gli altri due.**

Secondo teorema sui triangoli rettangoli

$b=c\cdot tg\,\beta=c\cdot ctg\,\gamma$ **(vedi fig. 10): in un triangolo rettangolo un cateto è uguale all'altro cateto per la tangente**

dell'angolo opposto al primo cateto (oppure per la cotangente dell'angolo opposto al secondo). Può esser usato per calcolare un cateto, (se sono noti l'altro cateto e un angolo), oppure la tangente di un angolo acuto (se sono noti i due cateti).

Non applicare mai i teoremi sui triangoli rettangoli ad un triangolo non rettangolo!

Non usare mai le funzioni goniometriche dell'angolo retto quando applichi i teoremi sui triangoli rettangoli!

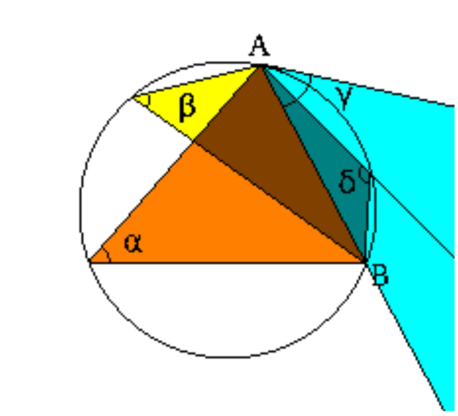

Figura 11: teorema della corda

Teorema della corda

La lunghezza di una corda AB è uguale al diametro della circonferenza per il seno di un angolo alla circonferenza a piacere, purché insista su uno dei due archi AB (per esempio, facendo riferimento alla figura 11, $\overline{AB}=2r\,sen\,\alpha=2r\,sen\,\beta=2r\,sen\,\gamma=2r\,sen\,\delta$).

Teorema dei seni

$\frac{a}{sen\,\alpha}=\frac{b}{sen\,\beta}=\frac{c}{sen\,\gamma}$ (il rapporto tra un lato e il seno dell'angolo opposto è uguale per tutti i lati di un triangolo; vedi figura 12. È preferibile mettere a primo membro la frazione con il lato da calcolare e a secondo quella con il lato noto). Si usa con qualunque triangolo, quando sono noti un lato e due angoli.

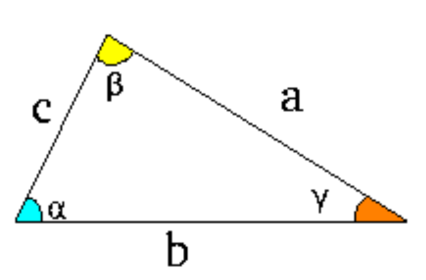

Figura 12:i lati che misurano a, b e c sono opposti agli angoli α, β e γ

Teorema di Carnot (o del coseno)

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ (vedi figura 12; si usa con qualunque triangolo, quando sono noti due lati e l'angolo compreso. Può anche essere usato quando sono noti i tre lati per calcolare $\cos\alpha$).